RIGID解析入門 (リジッド幾何学と群作用)

加藤, 文元

数理解析研究所講究録
1073 巻 1998 年 1-48

RIGID 解析入門

加藤 文元
九州大学大学院数理学研究科
e-mail: fkato@math.kyushu-u.ac.jp

この小論は 1998 年 5 月 6 日から同 8 日まで京都大学数理解析研究所にて開催された研究集会「リジッド幾何学と群作用」において筆者が行った講演「p 進解析入門 I、II」の報告として、その予稿をまとめ、更に幾つかの点について必要と思われる部分を付足したものである. 主催者からは 2 講演分として、ある数のページ数を依頼されたのであるが、実際筆者が上記研究集会の場において講演した内容をまとめた所、これにページ数が遥かに及ばなかったので、講演の場においてははっきりと定義、説明しなかった幾つかの話題について補足する事にした.

具体的には、本稿 Chapter 1、及び Chapter 2 は実際に筆者が講演の場において使用した予稿を、ほとんどそのまままとめたものである. これらにおいては、Rigid 解析空間をその基礎から説明しているのであるが、これに関しての幾何学、例えば連接層やコホモロジーといった概念への言及はしていなかった. そこで、Chapter 3 においてこれらについて基本的な事を解説した. また、Rigid 解析幾何において非常に重要かつ興味深い話題として、いわゆる p-進一意化 (p-adic uniformization) の理論があるが、これは本稿の Chapter 1 から Chapter 3 までの流れの自然な延長線上にあるものと思われたため、Chapter 4 という章を改めて設け、これを説明した.

この小論の原稿は九州大学の落合啓之氏と東北大学の志甫淳氏に見て頂いた. 志甫淳氏には Chapter 1 から Chapter 3 までについてコメントして頂いた. 特に Chapter 3 の §4 の記述は彼の示唆によるところが大きい. また、落合啓之氏からは原稿全般に渡ってきめ細かな意見を頂いた. お二人に感謝する. 最後に、今回の研究集会においてお世話して頂いた主催者の方々に感謝する.

目次

CHAPTER 1

TATE による RIGID 解析.

この章では、始めに Rigid 解析の基本的なアイデアについて導入を行った後、Tate の処方箋に従って Rigid 解析の基本事項をまとめる. 最初の節においては Rigid 解析全般への導入として、主に複素解析との比較という観点から、p-進体等の非アルキメデス的な体の上で解析学を展開しようとする場合に、何がどの様に問題になるのか、そして、その問題の原因は何なのかについて述べる. これは、§2 以降において展開される Tate の Rigid 解析のアイデアを導入するための動機付けとなる. それに続く三つの節では、これを受けて、Rigid 解析学の基本的な概念や考え方を導入する. 理解の手助けとなる様に、最後の節には Rigid 解析空間の例を幾つか挙げておいた.

1. 基本思想.

まず、簡単な例について複素解析的状況との比較から始めよう[1]:

例 1.1 (楕円曲線のヤコビによる一意化). $q \in \mathbb{C}^\times$ を $|q| < 1$ なる様にとると、q で生成される $\mathbb{C}^\times$ の巡回部分群は乗法によって $\mathbb{C}^\times$ に自由かつ真性不連続に作用する. これによる商位相空間 $E: = \mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{C}^\times$ より誘導された複素構造を持ち、よく知られている様に複素トーラスとなる. 従って特に、これは射影代数的であり、例えば $\wp$-関数によって $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の 3 次曲線として実現される. ここで強調したい事は、E そのものは代数的である一方で、一意化写像

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow E = \mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$$

は複素解析的写像ではあるが、代数的ではないという点である.

一般に一意化 (uniformization) という操作は、結果的に代数多様体を生じる事はあっても、それ自体は決して代数的ではない解析固有の概念である. 従って、以下の様に p-進体上でも現象として一意化が観察されると、そこには何らかの意味で「解析」が存在していると予感させられる; 次の例は上記のヤコビによる楕円曲線の一意化の p-進体上での類似物と捉えられる:

例 1.2 (Tate 曲線). K を非自明な非アルキメデス的乗法付値 $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を持った完備付値体とし、(簡単のため) 代数閉であるとする (例えば、$K = \mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$). $q \in K^\times$

[1] 実は歴史的に見ても、以下の例が Tate による p-進解析幾何の導入の動機となったのである.

を $|q|<1$ なる様にとると、q で生成される $K^\times$ の巡回部分群は乗法によって $K^\times$ に自由かつ真性不連続に作用する. これによる商位相空間 $E:=K^\times/q^{\mathbb{Z}}$ を考えよう. 今度はこれが何らかの意味で更に良い構造を持つかどうかはわからない. しかし、以下の様に $q^{\mathbb{Z}}$ の作用に関する $K^\times$ 上の保型関数 (の類似) を考える事で、話は綺麗に平行に行く: 級数

$$\wp_1(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{q^n z}{(1-q^n z)^2}$$

を考える. K には付値が入っているから級数の収束が意味を持ち、またローラン展開等も同様に考えられる. その意味で、$\wp_1$ は $K^\times$ 上の「一価有理型関数」に収束する. また、自然数 k について

$$s_k=\sum_{m\geq 1}\frac{m^k q^m}{1-q^m}$$

と置くと、これは K の値に収束する. そこで

$$\wp(z):=\wp_1(z)+s_1$$

と定義する. これは容易にわかる様に、保型性 $\wp(qz)=\wp(z)$ を持っている.

定理 1.3 (Tate). $B=-5s_3$ 及び $C=-(5s_3+7s_5)/12$ とする時、次が成り立つ:

$$\wp'^2+\wp\wp'=\wp^3+B\wp+C.$$

更に、対応 $z\mapsto(1:\wp(z):\wp'(z))$ によって E は上式で定義される $\mathbb{P}^2(K)$ の 3 次曲線に全単射に埋め込まれる[2].

勿論、この場合でも一意化写像 $K^\times\to E=K^\times/q^{\mathbb{Z}}$ は代数的ではないわけであるが、この小論で紹介する「**Rigid 解析 (幾何)**」は、これが解析的な写像であるとの解釈を与える. もう少し詳しく言うと、$K^\times$ 及び E は Rigid 解析多様体であり、写像 $K^\times\to E$ は Rigid 解析的被覆写像となっている. また、上記の $\wp$ や $\wp'$ も、この意味で解析関数となる.

K を非自明な非アルキメデス的乗法付値 $|\cdot|\colon K\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を持った完備かつ代数的に閉な付値体としよう. この乗法付値 $|\cdot|$ によって集合 K には距離位相が入る. また、我々は形式的巾級数の (絶対) 収束性についても論じる事が出来る. 従って、上の Tate 曲線の例において示唆した様に、K 上には至極限定された意味では既に解析があると言って良い. もう少し具体的に言うと、例えば K の開集合上で定義されている (上の $\wp$-関数の様な) 関数について、それが各点のまわりでテーラー展開、もしくはローラン展開可能であるか否かを議論する事は十分に可能であり、意味がある.

しかしながら、だからと言って複素解析の時と全く同様に解析学を展開しようとすると、実は非常に本質的な問題が生じる. これを具体的に見てみよう: 今、K の任

[2] K 上のすべての楕円曲線がこの様な一意化を持つわけではない; 尚、Chapter 3 の §1 を参照.

意の開集合 U に対して、仮に U 上の「正則関数」全体のなす環を、単に U の各点のまわりで収束巾級数に展開出来る関数全体として定義したとしよう:

$$\mathcal{O}(U) := \left\{ f\colon U \to K \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{locally presented by a}\\ \text{convergent power series}\end{array} \right\}.$$

問題はこの環 $\mathcal{O}(U)$ は恐ろしく大きいという事である. 実は、既に局所的に定数である様な関数全体も大きすぎる; 実際、付値 $|\cdot|$ の値群、即ち $G = \mathrm{Image}|\cdot|(\subset \mathbb{R}_{\geq 0})$ (これは可除群である) から K への 任意の 写像と $|\cdot|$ との合成は局所定数関数である[3].

この事は以下の様に K の位相の状況から来る問題点として位置付ける事が出来る; 即ち、解析接続の原理、つまり「一致の原理 (principle of unique continuation)」に関する問題点である. よく知られている様に、K の距離位相は全不連結 (totally disconnected) である、即ち2点以上からなる部分集合は連結でない (例えば [**Gouvêa 1997**, 2.3.8] を参照). 特に任意の開集合は決して連結ではない[4]. 従って、意味のある解析接続の概念を得る事はこのままでは不可能である; ある点のまわりで局所的に巾級数で書けても、その点以外の点のまわりでのその関数の性質は、それがどんなに近い点であっても、もとの点のまわりの性質とは全く関連が無い、という事になってしまう. この事からも、上で定義した環 $\mathcal{O}(U)$ が巨大であるという事が頷けるであろう.

読者は、これらの問題は上記の関数の解析性の定義に現れた「局所的」という概念がそもそもの災いの発端であると気付かれるだろう. 念のためもう一度整理すると:

(1) 既にある関数が「解析的」であるかどうかを、巾級数で書けるという「局所的」性質で特徴付ける事は十分意味のある事であるが、
(2) 逆にその「局所的」性質だけからでは意味のある「解析関数」を特徴付ける事は出来ない、
(3) なぜなら、位相があまりにも細かすぎるため解析接続の原理が有意義に働かないからである.

従って、この「局所的」という概念を改良する事が必要となる. これは (少なくとも筆者にとっては) 非常にデリケートでわかりにくい話となってしまう可能性があるので、ここで問題点を今一度整理しつつ反省してみようと思う. そもそも、複素関数論において、関数が局所的に巾級数で展開出来ると言う時、我々は厳密には何をしているのだろうか? 例えば U を $\mathbb{C}$ の連結領域として、U 上定義された複素数値関数 f が正則であるとは次の事を意味するのであった: U の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ が存在して、各 U_i 内の点 x_i を中心とし U_i を含む開円盤上で収束する巾級数 g_i が存在して、U_i 上の関数と見なした g_i と $f|_{U_i}$ が関数として一致する.

---

[3] よく知られている様に、K の中で付値が一定という条件で定義される部分集合は開集合である (例えば [**Gouvêa 1997**, 2.3] を参照).

[4] K の付値は非自明であると仮定していた事に注意.

ここで大事な事は、U の開被覆をとっているという事である．上で「局所的」という言葉を使って定義した $U \subset K$ 上の「正則関数」についても、同様の事をはっきり意識していなければならない．この場合もやはり $f\colon U \to K$ の正則性は何か U の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を用いて導入されているのである．ここに至って、我々は $\mathbb{C}$ と K の位相の違いから生じる問題点をはっきりさせる事が出来る．$\mathbb{C}$ の場合は、なにしろ U は連結であるのだから $\mathfrak{U}$ をいくら細かくとっても、その各メンバーは必ず他の少なくとも一つのメンバーと交わっている．しかし、K 上の場合はその開被覆 $\mathfrak{U}$ をある程度細かくとりすぎてしまうと、各々のメンバーは他のいかなるメンバーとも交わりを持たなくなってしまう．その結果、「局所的」な性質が伝播しない、つまり解析接続の原理が働かない解析学が出来上がってしまうというからくりなのである．結論として、この場合の「局所的」という概念は開被覆の取り方という点と密接な関わりがある．もっと言えば、「局所的」を改良しようと思ったら、ある程度以上細かくなりすぎない様に、開被覆の取り方に制限を加えるという事が最も重要なポイントとなる．

そこで、この「開被覆の取り方に制限を加える」という事を実際に実行する際の処方箋を、Tateのアイデアに従って段階的に概観してみよう:

まず第一に、解析空間等について論じる際にその基本ブロックとなる解析的近傍(あるいは局所patch)の概念を導入し固定する．例えば閉円盤とか閉アニュラス(閉円盤から開円盤を引いたもの)等はこれらの局所patchの例である．(閉円盤や閉アニュラスは開集合である事に注意.) Rigid解析においては、この様な基本ブロックは *affinoid* と呼ばれるものである．

• 読者はここで、何故複素解析の時の様に開円盤を採用せず、閉円盤を基調にするのか疑問に思われるであろう．(もっとも、複素解析との類似で p-進解析を見るという態度そのものも、あまり良いとは言えない事を意識しておくべきではある; 藤原一宏さんが講演の中で述べていらした様に、Rigid 解析と複素解析は似ていない面があるという事も重要なのである.) 実は、開円盤や開アニュラスを基本に据えても一応ちゃんと意味のある解析学は出来るのである．実際、Krasner や Dwork らによる p-進解析の流儀ではこの様なものも局所 patch として扱っており、それによって解析接続の原理を導いている (例えば [**Dwork 1969**] 参照)．閉円盤や閉アニュラスを用いる場合と開円盤や開アニュラスを用いる場合とで生じる大きな違いは、「解析的要素」と「解析的関数」という二つの概念の一致、不一致である．前者の場合これらは一致し、後者の場合これらは一致しない ([**ibid. §0**])．同等の話は複素解析の場合にも当てはまると思われる; つまり、例えばコンパクト集合を基本 patch として解析学を組み立てる事も出来るであろう．(恐ろしく変なものが出来上がるかもしれないが.)

第二に、U を上の意味での基本ブロックとする時、その局所化の概念を定義する事である．つまり、U の被覆のメンバーとなり得る U の部分集合の概念を定めるわけである．用語を先取りすれば、これはaffinoid U の *affinoid subdomain* と呼ばれる概念である．

しつこい様であるが、まだこの段階では(確かに開集合に何らかの制限が付いたとはいえ)本質的に「局所的」の概念を変えるには至ってない．実際、後に(注意4.2)見る様にaffinoid subdomain全体はaffinoidの全不連結的位相の生成基になってしまっ

ている．(開集合を制限したのは、単にその上に良い関数の環を載せたいという動機からであると言える.) 一番大事なのは次の段階なのである:

第三に、以上の data を Grothendieck 位相[5] の概念を用いて大域化、即ち、貼り合わせる．Grothendieck 位相を与える data で最も重要な要素は、各基本ブロック (今の場合は affinoid) の開被覆を規定する事である．後で見る様に、affinoid の場合許される開被覆は、affinoid subdomain から成る有限開被覆に規定される．これによって初めて、「局所的に」と語る事の効果が本質的に変わるのである[6]．この様に、Rigid 解析においては局所的条件について語る時の局所の概念が、従来の全不連続位相の時と比べてかなり自由度が減るという意味で、空間を「剛化」しているわけで、それが "Rigid" という名前の由来となっている．

注意 1.4. 解析接続について一言: Grothendieck 位相というのは、通常の意味では位相になっていないので、上の様にして得られた解析空間は、例えば通常の意味での位相幾何学的対象とはなり得ない．従って、ホモトピー論等は (少なくともそのままでは) 適用出来ない．また、path も自明なものを除いて存在し得ないので、例えば path に沿った解析接続といった、複素解析の場合に実りが多かった概念は存在しない．つまり、Rigid 解析は、その解析接続的側面について従来よりかなり改善されているとはいえ、まだまだ powerful でない面も多いと言える．Berkovich による p-進解析はその難点を克服している[7]．これについては **[Berkovich 1990]** 又はこの報告集の松田茂樹氏の論説を参照されたい．

以下、この章では §2 で affinoid について説明し、§3 で affinoid subdomain、特にその中でも重要な rational subdomain について、また §4 ではこれらの大域化として Rigid 解析空間の概念について解説する．

記号 1.5. 以下で頻繁に用いる概念、記号についてまとめる．まず、可換環上のノルムや付値といった概念について簡単にまとめておく．A を可換環とする．A 上の**セミノルム**とは関数 $\|\cdot\|: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって、$\|0\| = 0$、$\|1\| = 1$、更に任意の $f, g \in A$ について $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ 及び $\|f-g\| \leq \|f\| + \|g\|$ を満たすものである．$\mathrm{Ker}\|\cdot\| = \{f \in A \mid \|f\| = 0\}$ とおく．$\mathrm{Ker}\|\cdot\| = \{0\}$ である時、$\|\cdot\|$ は**ノルム**と呼ばれる．セミノルム $\|\cdot\|$ は、もし任意の $f, g \in A$ について $\|f-g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}$ なる時、**非アルキメデス的**と呼ばれる．また、ノルム $\|\cdot\|$ が任意の $f, g \in A$ について $\|fg\| = \|f\|\|g\|$ なる時、これは**付値**であるという．例えば、可換環 A の任意の零

---

[5] §4 参照.

[6] これによって大きく影響を受けるポイントとして、例えば位相的被覆写像と étale 射との違いを挙げる事が出来る．これについては後述する (Chapter 3 の注意 2.2参照).

[7] Berkovich 以前にも、既に van der Put (例えば **[van der Put 1982]**) らの仕事の中にそのアイデアが現れている．

でない f について $\|f\|_0=1$ と定めた $\|\cdot\|_0$ はノルムとなる．これは**自明なノルム**と呼ばれる．

K は常に自明でない非アルキメデス的乗法付値 $|\cdot|\colon K\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を持った完備付値体とし、必ずしも代数的閉ではないものとする．K が代数的閉である必要がある時はその都度明記する．$(A,\|\cdot\|)$ をノルム付の可換環とし、A は K-代数であるとする．この時、$(A,\|\cdot\|)$ が **K 上のノルム付代数**であるとは、任意の $f\in A$ 及び $c\in K$ について $\|cf\|\leq|c|\|f\|$ が成り立つ事を意味する．さらに A がノルム $\|\cdot\|$ について完備である時、これは **Banach K-代数**と呼ばれる．(これらの概念は、もちろんもっと一般の K について定義される概念である．)

L が K の有限次拡大である時には L 上に K の付値 $|\cdot|$ が一意的に延長されるので、これもまた $|\cdot|$ と書く事にする．$a\in K$ 及び $\rho\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ について

$$\begin{aligned}\mathsf{D}(a,\rho^-) &= \{x\in K \mid |x-a|<\rho\},\\ \mathsf{D}(a,\rho^+) &= \{x\in K \mid |x-a|\leq\rho\},\end{aligned}$$

と書く事にする．(ρ が付値 $|\cdot|$ の像の入らない時はこの二つは一致する．) 距離空間の一般論から、最初の物は開集合で後の物は閉集合であるが、実はこれらはすべて開かつ閉集合である (cf. e.g. [**Gouvêa 1997**, 2.3]).

2. Affinoids.

定義 2.1 (Tate 代数)**.** K 上 n-変数の **Tate 代数** $K\{t_1,\ldots,t_n\}$ とは、K 上の代数として

$$K\{t_1,\ldots,t_n\}\colon=\left\{\begin{array}{r|l}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n\geq 0}a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}t_1^{\nu_1}\cdots t_n^{\nu_n} & |a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}|\to 0 \text{ as}\\ \in K[[t_1,\ldots,t_n]] & \nu_1+\cdots+\nu_n\to\infty\end{array}\right\}$$

で定義され[8]、**Gauss ノルム**とよばれるノルム

$$f\mapsto\|f\|=\sup_{\nu_1,\ldots,\nu_n\geq 0}|a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}|$$

によってノルム付けられた Banach K-代数の事である．$K\{t_1,\ldots,t_n\}$ はしばしば $\mathbb{T}_K^n$ とか、また単に $\mathbb{T}^n$ と書かれる．

これは K の原点を中心として 1 以上の収束半径を持つ巾級数全体のなす代数であると見る事が出来る．この環の大事な性質を幾つか挙げる:

- $K\{t_1,\ldots,t_n\}$ のイデアルは常に閉である．
- $\mathfrak{m}$ を $K\{t_1,\ldots,t_n\}$ の極大イデアルとする時、$K\{t_1,\ldots,t_n\}/\mathfrak{m}$ は K の有限次拡大である．
- Weierstrass の準備定理が成り立つ．

[8] この左辺を表すのに、[**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**] や [**Fresnel, van der Put 1981**] においては $K\langle t_1,\ldots,t_n\rangle$ という記号が使われている．

これらの性質の証明については、例えば[**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, Chap. 5] や [**Fresnel, van der Put 1981**, Chap. II] を参照されたい.

定義 2.2 (Affinoid algebra). K 上の **affinoid** 代数とは Banach K-代数 A であって、自然数 n 及び全射連続[9] 準同型 α: $\mathrm{T}_K^n \to \mathrm{A}$ が存在するものである.

この時、開写像定理から Banach K-代数としての同型 $\mathrm{T}_K^n/\mathrm{Ker}\alpha \cong \mathrm{A}$ が存在する; 左辺は Gauss ノルムから誘導された剰余 (セミ) ノルム、即ち $f \in \mathrm{T}_K^n$ の剰余類 $\overline{f}$ に対して

$$\|\overline{f}\|_\alpha = \inf_{g \in \mathrm{Ker}\alpha} \|f + g\|$$

で定義されるノルムについてノルム付き代数と見なされている. 逆に、任意のイデアル $I \in \mathrm{T}_K^n$ について、その剰余代数 T_K^n/I を考えると、I は閉イデアルであるからその剰余セミノルムはノルムとなって $\mathrm{A} = \mathrm{T}_K^n/I$ は affinoid 代数となる.

一般の affinoid 代数 A の重要な性質としては次の事項を挙げる事が出来る:

- 任意の affinoid 代数は excellent ring である.
- (Noether の正規化定理) 何らかの n について K-代数としての有限射 $\mathrm{T}_K^n \to \mathrm{A}$ が存在する.
- K 上の affinoid 代数間の任意の K-代数としての準同型は連続である.

(cf. [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 6.1.2] or [**Fresnel, van der Put 1981**, Chap. II].)

定義 2.3 (Affinoids). A を K 上の affinoid 代数とする時、その **affinoid** [10] SpmA とは、集合としては A の極大イデアル全体であり、それに以下の要領で位相を導入したものである: 任意の $x \in \mathrm{SpmA}$ について、A/x は K の有限次拡大であった. そこで、$f \in \mathrm{A}$ に対して $f(x)$ を f の A/x における剰余類とすると、そのノルム $|f(x)|$ が定まる. SpmA は $\{\{x \in \mathrm{SpmA} \mid |f(x)| \leq 1\}\}_{f \in \mathrm{A}}$ を基底とする位相を持つ.

今、K 上の affinoid 代数 A と B の間に K-準同型 (従って連続) $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ があったとすると、これは対応する affinoid 間の連続射 $\mathrm{SpmB} \to \mathrm{SpmA}$ を誘導する; 実際 B の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ は K の有限次拡大であるから、$\mathfrak{m}$ の引き戻しは A の極大イデアルである.

ここで一つ典型的な例を挙げる.

---

[9] [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 2.1.8.3] 及び K の付値が非自明である事から、この様な射の連続性と有界性は同値となる.

[10] 本来ならば、後述する様に Grothendieck 位相と構造層をも考えて初めて affinoid と呼ぶべきで、ここで定義するものは単に maximal spectrum と呼ぶべきかもしれない.

例 2.4 (単位多重円盤)**.** まず、K が代数閉体であるとして、Tate 代数 T_K^n の affinoid を考えよう. K^n の単位多重円盤

$$\mathrm{D}^n(0,1^+) = \{(x_1,\dots,x_n) \in K^n \mid |x_i| \le 1 \text{ for } 1 \le i \le n\}$$

を考えると、T_K^n の元は $\mathrm{D}^n(0,1^+)$ 上の K に値をとる関数と思えるのであった. そこで各 $x \in \mathrm{D}^n(0,1^+)$ に対して $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathrm{T}^n \mid f(x) = 0\}$ とすると、容易にわかる様にこれは極大イデアルである. 従って写像

$$\mathrm{D}^n(0,1^+) \longrightarrow \mathrm{Spm}\mathrm{T}^n$$

が考えられる.

命題 2.5. この写像 $\mathrm{D}^n(0,1^+) \to \mathrm{Spm}\mathrm{T}^n$ は位相同型射である.

一般に代数閉体とは限らない K について、$\mathrm{Spm}\mathrm{T}_K^n$ は K の代数閉包 K^{alg} 上の単位多重円盤 $\mathrm{D}_{K^{\mathrm{alg}}}^n(0,1^+)$ の $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ の作用に関する商と位相同型となる. これらの主張の証明については、例えば [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 7.1.1.1] を参照されたい.

例 2.6. 再度 K が代数閉体であるとしよう. この時、任意のイデアル $\mathfrak{a} \in \mathrm{T}^n$ について affinoid 代数 $\mathrm{A} = \mathrm{T}^n/\mathfrak{a}$ の affinoid $\mathrm{Spm}\mathrm{A}$ は

$$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \{z \in \mathrm{D}^n(0,1^+) \mid f(z) = 0 \text{ for any } f \in \mathfrak{a}\}$$

と自然に同一視される. K が代数閉体とは限らない場合も同様で、K^{alg} 上で考えた $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ の $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ の作用に関する商と同一視される. T^n のイデアルとその零点集合の間には、代数幾何の場合と同様に Hilbert の零点定理がある:

定理 2.7 (Hilbert's Nullstellensatz)**.** 任意のイデアル $\mathfrak{a} \in \mathrm{T}^n$ について

$$\mathrm{Ideal}(\mathrm{V}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

が成り立つ.

証明は [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 7.1.2.3] を参照.

例 2.8. 簡単のため K が代数閉体であるとし、$\pi_i \in K$ $(1 \le i \le n)$ を $0 < |\pi_i| \le 1$ なる様にとる. この時

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= K\{t_1,\dots,t_n,\pi_1/t_1,\dots,\pi_n/t_n\} \\ :&= K\{t_1,\dots,t_n,u_1,\dots,u_n\}/(t_iu_i - \pi_i \mid 1 \le i \le n) \end{aligned}$$

という affinoid 代数 A を考えると、

$$\mathrm{Spm}\mathrm{A} \cong \{z \in \mathrm{D}^n(0,1^+) \mid |\pi_i| \le |z_i| \le 1\}$$

となる.

3. Affinoid subdomains.

まず、affinoid subdomain の一つの例である rational subdomain について述べる[11]. K は前節の通りとし、特に代数的閉であるとは仮定しないとする.

定義 3.1 (Rational subdomains). A を K 上の affinoid 代数とする. この時、有限個の SpmA 上共通零点をとらない様な元 $f_0, \ldots, f_n \in \mathrm{A}$ によって

$$R\colon = \{x \in \mathrm{SpmA} \mid |f_i(x)| \le |f_0(x)| \text{ for } i = 1, \ldots, n\}$$

と書ける様な SpmA の部分集合を SpmA の **rational subdomain** と呼ぶ.

この時、R は次で与えられる K 上の affinoid 代数 A_R によって SpmA_R と同一視される:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_R &= A \widehat{\otimes}_K K\{t_0, \ldots, t_n\}/(f_1 - t_1 f_0, \ldots, f_n - t_n f_0) \\ &=: A\left\{\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}\right\} \end{aligned}$$

ここで、「同一視される」という意味をもっと厳密に述べてみたい. まず、自然な射 $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_R$ から決まる affinoid 間の射 $\mathrm{SpmA}_R \to \mathrm{SpmA}$ の像は R に入る事に注意しよう. 実際、その像においては affinoid 代数 A_R の定義により、$|f_i(x)| \le |f_0(x)|$ ($\Leftrightarrow$ $|t_i| \le 1$) とならなければならない. 実は、この affinoid 代数 A_R は次の様な universality によって定められるものである (従って、標準的同型を除いて一意的に定まる): 任意の affinoid の射 $\phi\colon \mathrm{SpmB} \to \mathrm{SpmA}$ で $\phi(\mathrm{SpmB}) \subset R$ なるものに対して、K-準同型 $\mathrm{A}_R \to \mathrm{B}$ が、誘導された図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SpmB} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dotted] & \mathrm{SpmA} \\ & \mathrm{SpmA}_R \arrow[u] \end{tikzcd}$$

が可換なるように一意的に存在する.

一般に affinoid SpmA の部分集合 U に対して、何か affinoid SpmA$'$ 及び affinoid 間の射 $\varphi\colon \mathrm{SpmA}' \to \mathrm{SpmA}$ があり、(1) その像は U に入り、(2) 上の様な universality を満たす時、U は SpmA の **affinoid subdomain** であるという. この時、以下の事が定義からわかる (cf. [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 7.2.2.1]):

命題 3.2. φ は単射であり、その像は U に一致する. 更に任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{A}'$ 及び $n \in \mathbb{N}$ について、誘導された射

$$\mathrm{A}/\varphi^*\mathfrak{m}^n \longrightarrow \mathrm{A}'/\mathfrak{m}^n$$

は同型である.

---

[11] 講演では時間の都合で rational subdomain についてしか触れなかったが、以下で見る様に一般の affinoid subdomain は有限個の rational subdomain で細分されるので、実は rational subdomain だけで十分なのである (cf. 定理 3.3).

この様な意味で (rational) affinoid subdomain は affinoid と同一視されるという事なのである.

我々は以下では、比較的に具体的な取り扱いがしやすい rational subdomain に絞って議論を進める事にする; 実は以下の事実があるので、これで本質的には十分なのである (cf. [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 7.3.5.3]):

定理 3.3 (Gerritzen-Grauert). Affinoid SpmA の任意の affinoid subdomain は有限個の rational subdomain の和である.

では、rational subdomain の基本的な性質を幾つか述べよう:

補助定理 3.4. (1) $R, S \subset \mathrm{SpmA}$ を rational subdomains とすると、$R \cap S \subset \mathrm{SpmA}$ もまた rational subdomain である. (対応する affinoid 代数は $\mathrm{A}_R \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_S$.)

(2) $R_1 = \mathrm{SpmA}_1 \subset \mathrm{SpmA}$ を rational subdomain とし、$R_2 \subset R_1$ を R_1 の rational subdomain とすると、R_2 は SpmA の rational subdomain である.

証明は [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 7.2.3.7, 7.2.4.2] を参照. ここで、二つの rational subdomains の和集合は一般には rational subdomain ではない事に注意しよう.

系 3.5. $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m \in \mathrm{A}$ について $\{x \in \mathrm{SpmA} \mid |f_i(x)| \leq 1, |g_j(x)| \geq 1\}$ という形の SpmA の部分集合は rational subdomain である.

例 3.6 (Rational subdomains in $\mathrm{D}^1 = \mathrm{D}(0, 1^+)$). 簡単のため、$K$ は代数閉体であるとする. 一次元の単位円盤 $\mathrm{D}^1 = \mathrm{D}(0, 1^+)$ の rational subdomain を調べよう. 系 3.5 から次の形の部分集合は rational subdomain である事がわかる:

- Disk shape: $\{|z - z_0| \leq |\pi|\} = \mathrm{Spm}K\left\{T, \frac{T-z_0}{\pi}\right\}$ for $\pi \in K, 0 \neq |\pi| \leq 1$.
- Annulus shape: $\{|\pi'| \leq |z - z_0| \leq |\pi|\} = \mathrm{Spm}K\left\{T, \frac{T-z_0}{\pi}, \frac{\pi'}{T-z_0}\right\}$ for $\pi, \pi' \in K, 0 \neq |\pi|, |\pi'| \leq 1$.

一般に上の形の部分集合の有限個の共通部分となるような D^1 の部分集合を D^1 の **standard domain** と呼ぶ. 実は、D^1 の任意の rational subdomain は有限個の standard domain の和集合であることが知られている (証明は Weierstrass の準備定理を使い、難しくない; cf. [**Gerritzen, van der Put 1980**, III, (1.18)].)

4. Rigid 解析空間.

この節ではいよいよ、前節までの data を貼り合わせて解析空間を構成する. その際必要となる一般的な道具として (限定された意味の) Grothendieck 位相 (以下 G-位相と略す) の概念を復習しておこう: X を位相空間とする. この時、X 上の G-位相とは以下の data からなる組 $(\mathfrak{T}, \mathfrak{Cov})$ である:

- X の開集合を元とする族 $\mathcal{T}$、
- 任意の $U \in \mathcal{T}$ について、U の $\mathcal{T}$ の元からなる開被覆の族 $\mathcal{C}ov(U)$.

要請される条件は以下の通りである:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$; $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.
(2) $U \in \mathcal{T} \Rightarrow \{U\} \in \mathcal{C}ov(U)$.
(3) $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{C}ov(U)$, $V \subseteq U$, $V \in \mathcal{T} \Rightarrow \{U_i \cap V\}_{i\in I} \in \mathcal{C}ov(V)$.
(4) $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{C}ov(U)$, $\{V_{i,j}\}_{j\in J_i} \in \mathcal{C}ov(U_i) \Rightarrow \{U_{i,j}\}_{i\in I, j\in J} \in \mathcal{C}ov(U)$.

位相空間 X に G-位相 $(\mathcal{T}, \mathcal{C}ov)$ が与えられた時、$\mathcal{T}$ の元は admissible open set、また $\mathcal{C}ov(U)$ の元は U の admissible covering と呼ばれる.

ここで注意しておきたいのは、上の条件 (1) により $\mathcal{T}$ は有限個の交わりについて閉じているが、集合和に関しては何も条件がないという事である. 従って、G-位相は通常の意味の位相ではない. $\mathcal{T}$ は、いわば、取り扱う開集合に制限を設け、$\mathcal{C}ov$ は (§1 で述べた様に)「局所的」という考え方に制限を設ける様に働く.

定義 4.1 (G-topology on SpmA). A を K 上の affinoid 代数とし、対応する affinoid SpmA に次の様にして G-位相を導入する: まず、SpmA の admissible open set とは、rational subdomain の事とし[12]、各 rational subdomain R について、その admissible covering とは rational subdomain からなる有限開被覆の事とする. 補助定理 3.4 より、これは SpmA 上の G-位相を与える事がわかる.

注意 4.2. 定義 2.3 における affinoid の位相の定義と、上で与えた G-位相の定義を比べてみると、affinoid においては admissible open set 全体はもともとあった位相の基底となっている事がわかる.

次に affinoid SpmA 上に構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{SpmA}}$ を定義しよう. これは、任意の rational subdomain R に対して

$$\mathcal{O}_{\mathrm{SpmA}}(R) = \mathrm{A}_R$$

とする事で定義される. 勿論、これが SpmA の G-位相に関して層になっている事は証明しなければならない. これについては有名な Tate's acyclicity theorem がある (cf. [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 8.2] 又は、[**Fresnel, van der Put 1981**, III.2.2]):

定理 4.3 (Tate). U を $X = \mathrm{Spm(A)}$ の rational subdomain として $U = U_1 \cup \cdots \cup U_m$ を admissible covering とする. この時、

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j=1}^{m} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

---

[12] ここで、0 という環を affinoid 代数と見做し、$\emptyset$ は rational subdomain としている.

は完全である．ここで、最後の射は二つの可能な制限射の差である．

上で G-位相が入った affinoid SpmA と構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{SpmA}}$ を組にして得られる G-局所環付空間を改めて A に対応した **affinoid** と呼び、記号は新しく SpA と書くことにする．

定義 4.4 (Rigid 解析空間)**.** G-位相付きの位相空間 X と、その上の G-位相に関する局所環の層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ が K 上の **Rigid 解析空間**であるとは、それが G-位相に関して局所的に K 上の affinoid と同型である事、即ち、X の admissible covering $\{X_i\}_{i\in I}$ が存在して、各 $i \in I$ について $(X_i, \mathcal{O}_X|_{X_i})$ が K 上の affinoid に同型[13]である事である．

この様な covering $\{X_i\}_{i\in I}$ を **affinoid covering** と呼ぶ．X 上の Rigid 解析構造とは、従って、affinoid covering の細分に関する同値類という事になる．

以下、Rigid 解析空間の例を幾つか挙げる．原則として、簡単のため K は代数閉であると仮定するが、そうでない場合も、前節に述べたような方法で容易に修正出来る:

例 4.5 (Projective space $\mathbb{P}_K^{n,\mathrm{an}}$)**.** ここでは projective line の場合について例示する; 一般次元の場合はこれから容易に類推出来る[14]．$(X:Y)$ で $\mathbb{P}_K^1$ の同次座標を表し、$z = X/Y, w = Y/X$ を非同次座標とする．

$$\begin{array}{rcccl} U^+ & = & \{(X:Y) \mid |X| \le |Y|\} & = & \{z \in K \mid |z| \le 1\} \\ U^- & = & \{(X:Y) \mid |X| \ge |Y|\} & = & \{w \in K \mid |w| \le 1\} \end{array}$$

とし、これらを単位円盤という affinoid と見做す．即ち $U^+ = \mathrm{Sp}K\{z\}$、$U^- = \mathrm{Sp}K\{w\}$．$\mathbb{P}_K^1$ は集合として U^+ と U^- で覆われ、その交わりは円周 $\{|z| = 1\}$ である．これは U^+ と U^- 各々の中で rational subdomain になっている; 実際、例えば $\{|z| = 1\} = \mathrm{Sp}K\left\{z, \frac{1}{z}\right\}$．そこで、この円周 $\{|z| = 1\}$ 上で $z \mapsto w = 1/z$ によって U^+ と U^- を貼り合わせる事が出来、この affinoid covering $\{U^+, U^-\}$ によって $\mathbb{P}_K^1$(の閉点全体) に Rigid 解析空間の構造が入る．

例 4.6 (Affine space $\mathbb{A}_K^{n,\mathrm{an}}$)**.** はじめに $n = 1$ の場合を例示しよう．z を $\mathbb{A}_K^1$ の座標とする．今、$\pi \in K$ $(|\pi| < 1)$ として $c = \pi^{-1} \in K$ としよう．この時、$i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ について

$$U_i = \{z \in \mathbb{A}_K^1 \mid |z| \le |c|^i\}$$

とすると、これは affinoid $\mathrm{Sp}K\left\{\frac{z}{c^i}\right\}$ と見做す事が出来る．$\mathbb{A}_K^1$ はこれらの和であるから、こうして一つの affinoid covering $\{U_i\}_{i\ge 0}$ が得られた．また、$V_0 = U_0$ として $i \ge 1$ について

$$V_i = \{z \in \mathbb{A}_K^1 \mid |c|^{i-1} \le |z| \le |c|^i\}$$

[13] ここでいう同型とは、G-位相に関する局所環付 site としてである他に、通常の意味での位相空間としても同型という意味である．

[14] 諏訪紀幸さんの言葉を借りれば、「1 を聞いて n を知る」わけである．

とすると、もう一つ affinoid covering $\{V_i\}_{i\geq 0}$ が得られる．この最後の affinoid covering は次章で用いる．一般の n については、上の U_i という affinoid をやはり半径 $|c|^i$ の球体

$$U_i = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{A}_K^n \mid |z_j| \leq |c|^i\}$$

で置き換えれば同様である．

例 4.7 ($\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}}$)**.** これは affine line の場合とアイデアは同じなので簡潔に述べると、各整数 i について V_i を上と同じ式で定義すると $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が affinoid covering を与える．

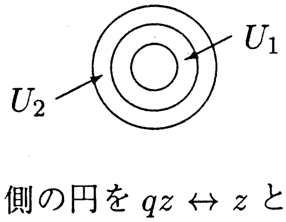
例 4.8 (Tate 曲線)**.** この章の始めに見た Tate 曲線の Rigid 解析空間としての構造を述べる．記号等は例 1.2にならう事にする．K の部分集合 $U = \{z \in K \mid |q| \leq |z| \leq 1\}$ を考えると、これは $q^{\mathbb{Z}}$ の $K^\times$ への作用に関する基本領域を与えている．今、$q = \varpi^2$ なる $\varpi \in K$ をとり、

$$\begin{aligned} U_1 &= \{z \in K \mid |q| \leq |z| \leq |\varpi|\} \\ U_2 &= \{z \in K \mid |\varpi| \leq |z| \leq 1\} \end{aligned}$$

としよう．U_1、U_2 はそれぞれ

$$\mathrm{Sp}K\left\{\frac{z}{\varpi}, \frac{q}{z}\right\}, \qquad \mathrm{Sp}K\left\{z, \frac{\varpi}{z}\right\}$$

という affinoid と見做す事が出来る．Tate 曲線 E は U_1、U_2 で覆われ、その交わりは二つの円周である．一つは U_1 と U_2 双方において $\{|z| = |\varpi|\}$ と書ける rational subdomain で、これはそのまま同一視する．もう一つは U_1 において $\{|z| = |q|\}$、U_2 において $\{|z| = 1\}$ と書ける rational subdomain であり、これらは $qz \leftrightarrow z$ によって貼り合わせられる．こうして $\{U_1, U_2\}$ が Tate 曲線 E の affinoid covering を与える．



上の図で一番外側の円と一番内側の円を $qz \leftrightarrow z$ という規則で貼り合わせるわけで、そうするとドーナツ形になるわけである (信じてはいけません)．また、$K^\times$ に例 4.7 に従って解析構造を入れると、一意化写像 $K^\times \to E$ は Rigid 解析空間の射となっている事もわかる．

尚、我々は $q = \varpi^2$ なる ϖ をとって議論したが、2 以上の自然数 n について $q = \varpi^n$ なる ϖ をとっても良い．この場合、Tate 曲線 E は n 枚の rational subdomain で覆われる (cf. Chapter 2 の例 2.6)．また $q = \varpi_1\varpi_2$ なる分解でも同等の議論が出来るが、ϖ_1, ϖ_2 のどちらかのノルムが 1 である時は若干注意が必要である; この時に得られる affinoid covering は後述の pure covering (cf. Chapter 2 の §2) でない例になっている．

この節の最後に次の一般的事実を [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 9.3.4.2] 及び [**Berthelot**, 0.3.3] から引用しておく:

定理 4.9. K 上局所有限表示型のスキームの閉点の集合には標準的な K 上の Rigid 解析空間の構造が入る. 更に、自然な環付 site の射 $X^{\mathrm{an}} \to X$ が存在する.

ここでその解析構造の構成を簡単に概観しよう (ここでの説明には Chapter 3 で定義される「強 G-位相」の概念が必要である): K 上有限表示型の affine スキーム $\operatorname{Spec} B$、$B = K[z_1, \ldots, z_n]/\mathfrak{a}$ については、例 4.6で見た U_i に対応する affinoid 代数を A_i として $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i/\mathfrak{a}\mathrm{A}_i$ を考えれば $\{\mathrm{SpB}_i\}_{i\geq 0}$ が $\operatorname{Spec} B$ の閉点集合に Rigid 解析空間としての構造を定める. 更に任意の Zariski 開集合 $D \subset \operatorname{Spec} B$ に対して、各 $D \cap \mathrm{SpB}_i$ は Chapter 3 の定義 1.1で定義する強 G-位相の意味で admissible である. そこで、一般の K 上局所有限表示型のスキーム X についてはこれらの局所的な data を貼り合せる事で Rigid 解析空間の構造を入れる. こうして出来上がった Rigid 解析空間を X^{an} と書く事にしよう.

CHAPTER 2

解析的還元と RAYNAUD による RIGID 解析.

前章では Tate のアイデアに従って Rigid 解析という枠組みについて述べた. そこで見た様に、Rigid 解析という学問は、多少の違いはあるにせよ、大体において複素解析をモデルとして構成されていた. しかしながら、Rigid 解析にはこの章で述べようとしている解析的還元 (analytic reduction) や付値環上の形式モデルといった、非アルキメデス的という性質から生じる、複素解析には無かった独自の概念がある. これらは、もしこれらについて触れなかったとすると Rigid 解析の理解としては完全に片手落ちであるといっても過言でないくらい重要な側面で、これによって前節までには全く現れて来なかった Rigid 解析の本当の姿が見えてくるのである. その金字塔とも言うべき Raynaud の仕事は、Rigid 解析空間の圏はある種の形式スキームの圏を開イデアルによるブローアップを可逆化して得られた圏に圏同値であるという事を主張する. これは次の二つの点で強力である: 一つには、これによって代数幾何学が過去に培って来た形式スキームに関する知見がそのまま Rigid 解析幾何に応用出来るという点、もう一つには、従来非常に抽象的な印象を与えていた形式スキーム、更にはそのブローアップによる極限といった対象に、解析空間という比較的具体性の多い意味付けを与えたという点である.

この章では、始めに §1 で affinoid の解析的還元や形式モデルという考え方に触れた後、§2 で上に述べた Raynaud の大定理が成り立つ仕組みの、ごく基本的な事を説明し、§3 でこの定理の紹介をする.

1. 解析的還元と形式モデル.

まず、この節と次の節で用いる記号をまとめておく:

記号 1.1. K は前章の如く、非自明な非アルキメデス的乗法付値 $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を持った完備付値体とし、必ずしも代数的閉ではないものとし、もしそれが代数的閉である時はその都度明記する. R で K の付値環 $R = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ を表し、$\mathfrak{m}$ はその極大イデアル $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid |x| < 1\}$ を表す. R の位相の生成元 $0 \neq \pi \in \mathfrak{m}$ を一つ固定する. k は R の剰余体 $k = R/\mathfrak{m}$ であるとする.

K 上の affinoid 代数 A が与えられたとして、その上に **supremum** セミノルムというものを定義しよう: $f \in \mathrm{A}$ に対して、

$$|f|_{\sup} = \sup_{x \in \mathrm{SpmA}} |f(x)|.$$

勿論これがちゃんと有限の値をとる事は示さねばならない. 実は A が Banach 代数であるという事から、その K 上の Banach ノルム $|\cdot|$ に対して $|f|_{\sup} \leq |f|$ が成り立つのである ([**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 3.8.2.2]). $|\cdot|_{\sup}$ は一般にノルムとはならない事に注意しよう. 実際これは、その作り方から power-multiplicative、即ち自然数 n に対して $|f^n|_{\sup} = |f|_{\sup}^n$ となる事がわかるから、A の巾零元は全て $\mathrm{Ker}|\cdot|_{\sup}$ に入る. 一方、$\mathrm{A} = \mathrm{T}_K^n$ (Tate 代数) である時には、その上の Gauss ノルムと supremum セミノルムは一致する.

定理 1.2 (Maximal Modulus Principle). A を K 上の affinoid 代数、$f \in \mathrm{A}$ とする時、

$$|f|_{\sup} = |f(x)|$$

となる $x \in \mathrm{SpmA}$ が存在する.

証明は [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 6.2.1.4] を参照されたい.

K 上の affinoid 代数 A に対して、次の様な記号を導入する:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\circ} &= \{f \in \mathrm{A} \mid |f|_{\sup} \leq 1\}, \\ \mathrm{A}^{\circ\circ} &= \{f \in \mathrm{A} \mid |f|_{\sup} < 1\}, \\ \overline{\mathrm{A}} &= \mathrm{A}^{\circ}/\mathrm{A}^{\circ\circ}; \end{aligned}$$

A° は A の部分環で R-代数となっており、$\mathrm{A}^{\circ\circ}$ はそのイデアルである. 例えば、$K^{\circ} = R$ で $K^{\circ\circ} = \mathfrak{m}$、$\overline{K} = k$ という具合である.

例 1.3. Tate 代数 $\mathrm{T}_K^n = K\{t_1, \ldots, t_n\}$ においては、その上の Gauss ノルムと supremum セミノルムは一致するのであった. その事から以下の事が直ちに従う:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_K^{n\,\circ} &= R\{t_1, \ldots, t_n\} \\ &:= \left\{ \begin{array}{r|l} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n \geq 0} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n} & |a_{\nu_1, \ldots, \nu_n}| \to 0 \text{ as} \\ \in R[[t_1, \ldots, t_n]] & \nu_1 + \cdots + \nu_n \to \infty \end{array} \right\} \\ \overline{\mathrm{T}_K^n} &= k[t_1, \ldots, t_n]. \end{aligned}$$

つまり、$\mathrm{T}_K^{n\,\circ}$ は R 上の多項式環 $R[t_1, \ldots, t_n]$ の (π)-進完備化である. $\overline{\mathrm{T}_K^n}$ が k 上の多項式環になっているという事は注目に値する. 実際、$R\{t_1, \ldots, t_n\}$ の元はその収束条件より高々有限個の項を除いて $\mathrm{T}_K^{n\,\circ\circ}$ に入る.

一般の affinoid 代数 A の A° や $\overline{\mathrm{A}}$ の構造については、以下の事が成り立つ:

命題 1.4. A を K 上の affinoid 代数とする.

(1) A° は A のモデルである ; 即ち、(位相込みで) $\mathrm{A}^{\circ} \otimes_R K \cong \mathrm{A}$.

(2) A° は (π)-進位相で完備である.

(3) A° は R 上位相的に有限型 (topologically of finite type) である ; 即ち、何らかの $R\{t_1,\dots,t_n\}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ によって $R\{t_1,\dots,t_n\}/\mathfrak{a}\cong \mathrm{A}^\circ$.

(4) A° は R 上平坦である.

(5) $\overline{\mathrm{A}}$ は k 上の有限型代数である.

証明. (1) 及び (2) は容易である. R 上の平坦性は、この場合 R-torsion が無いという事と同値であるから (4) は直ちに従う.

(3) 及び (5) の証明に取り掛かる前に、幾つか言葉を導入しておこう: A の Banach ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ (α: $\mathrm{T}_K^n\to \mathrm{A}$: 全射) を任意に考えよう. A の元 f が *power-bounded* であるとは、$\{\|f^n\|_\alpha \mid n\in\mathbb{N}\}$ が有界である事である. 表示 α を取り替えても、得られる剰余ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ のノルムとしての同値類は不変であるから、この概念は表示の取り方によらない. また、A の元 f が *topologically nilpotent* であるとは $\lim f^n=0$ となる事である. ここで極限は Banach ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ の意味で取ったが、これも表示の取り方によらない.

以上を踏まえて (3) を示そう. [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 6.2.3] により、A° は A の power-bounded な元全体に、$\mathrm{A}^{\circ\circ}$ は A の topologically nilpotent な元全体にそれぞれ一致する. 従って、表示 α: $\mathrm{T}_K^n\to\mathrm{A}$ を取った時に、それから誘導される射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_K^{n\,\circ} & \longrightarrow & \mathrm{A}^\circ \\ \mathrm{T}_K^{n\,\circ\circ} & \longrightarrow & \mathrm{A}^{\circ\circ} \end{array}$$

はそれぞれ全射である. (ここで T_K^n においては、その Gauss ノルムと supremum セミノルムは一致するという事実を使った.) 特に最初の射の全射性から (3) がわかる. また (5) も、これらの全射性と例 1.3より従う. □

定義 1.5. R-代数 A が **admissible** であるとは、A が (π)-進完備で、R 上平坦かつ位相的に有限型である事である.

注意 1.6. [**Bosch, Lütkebohmert 1993**, 1.1 (c)] によれば、admissible な R-代数 A は同時に位相的に有限表示型である、即ち、何らかの $R\{t_1,\dots,t_n\}$ の <u>有限生成</u> イデアル $\mathfrak{a}$ によって $R\{t_1,\dots,t_n\}/\mathfrak{a}\cong A$ となる.

定義 1.7 (形式モデルと解析的還元). $X=\mathrm{SpA}$ を K 上の affinoid とする. この時、$\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}\,\mathrm{A}^\circ$ を X の**形式モデル**、$\overline{X}=\mathrm{Spec}\,\overline{\mathrm{A}}$ を X の**解析的還元**という. $\mathfrak{X}$ は $\mathrm{Spf}\,R$ 上の形式スキームで、$\overline{X}$ は k 上の代数的スキームである.

またこの時、**還元射** (reduction map)

$$\mathrm{Red}_X\colon X=\mathrm{SpmA}\longrightarrow \overline{X}=\mathrm{Spec}\,\overline{\mathrm{A}}$$

というものを、$\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap \mathrm{A}^\circ / \mathfrak{a} \cap \mathrm{A}^{\circ\circ}$ で定義する ($\mathfrak{a}$ が A の極大イデアルである時、$\mathfrak{a} \cap \mathrm{A}^\circ$ は容易にわかる様に A° の極大イデアルである).

命題 1.8. Red_X は (G-) 位相空間の連続射であり、X は $\overline{X}$ の閉点の集合に全射的に写される.

証明. $\overline{f} \in \overline{\mathrm{A}}$ に対する $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathrm{A}}$ の affine 開集合 $U_{\overline{f}} = \mathrm{Spec}\,\overline{\mathrm{A}}_{\overline{f}}$ を考えよう. $f \in \mathrm{A}^\circ$ を剰余類 $\overline{f}$ からとると、SpmA 上の関数として f は 1 以下の値をとる. $U_f = \{x \in \mathrm{SpmA} \mid |f(x)| = 1\}$ は rational subdomain で、対応する affinoid は $\mathrm{Sp}A\{f, f^{-1}\}$ である. $|f(x)| = 1$ は $\overline{f}(\mathrm{Red}_X(x)) \neq 0$ と同値であるから、$\mathrm{Red}_X^{-1}(U_{\overline{f}}) = U_f$ となる. よって最初の主張が示された. 後の主張はほぼ自明. □

還元射は、もちろん $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap \mathrm{A}^\circ$ によって

$$\mathcal{R}ed_X \colon X = \mathrm{SpmA} \longrightarrow \mathcal{X} = \mathrm{Spf}\,\mathrm{A}^\circ$$

の形でも定義出来る. この場合は、更に局所環付 site の射になっている事に注意.

例 1.9 (単位円盤の解析的還元). 単位円盤 $\mathrm{D}^1 = \mathrm{D}(0, 1^+) = \mathrm{Sp}K\{T\}$ の解析的還元を調べよう[1]. 対応する解析的還元は affine 直線 $\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}\,k[T]$ である. 還元射 $\mathrm{Red}_{\mathrm{D}^1}$ は D^1 の "内点"、即ち $\mathrm{D}(0, 1^-)$ に属する点すべてを $\mathbb{A}_k^1$ の原点に、その他の点はその他の点に写す. K が代数閉体の場合は、D^1 と R、$\mathbb{A}_k^1$ と k を同一視すれば、これは丁度 $\mathfrak{m}$ を法とした還元射 $R \to k$ そのものである.

2. Pure coverings とその細分.

前節では affinoid について解析的還元や形式モデルを定義したが、これらの概念はそのままでは大域化出来ない. 例えば、Chapter 1 の例 4.6で最初にとった affinoid covering $\{U_i\}_{i \geq 0}$ では、各 U_i の解析的還元や形式モデルはうまく貼り合わない. 従って、これらがうまく貼り合う様なうまい affinoid covering をとる必要がある; ほとんど同語反復的であるが、これについて以下の様な概念がある:

定義 2.1 (Pure covering). X を Rigid 解析空間とし、$\{U_i\}_{i \in I}$ を affinoid covering とする. $\{U_i\}_{i \in I}$ が以下の条件を満たす時、これは **pure covering** であると呼ばれる:

(1) 各 U_i は高々有限個の他のメンバー U_j と交わる.
(2) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ の時、U_i の解析的還元 $\overline{U}_i$ の Zariski affine 開集合 V_{ij} が存在して $U_i \cap U_j = \mathrm{Red}_{U_i}^{-1}(V_{ij})$ かつ $\mathrm{Red}_{U_i \cap U_j}(U_i \cap U_j) = V_{ij}$ を満たす.

---

[1] これは K が代数的閉でない場合には正確でないルーズな言い方であるが、容易に修正出来るので簡単のため敢えてこうする.

$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ が Rigid 解析空間 X の pure covering である時、各 U_i の解析的還元 $\overline{U}_i$ は k 上のスキーム $\overline{X}$ に貼り合う．また、明らかに還元射 $\mathrm{Red}_X\colon X \to \overline{X}$ が存在する．同様に考えれば、各 U_i の形式モデル $\mathfrak{U}_i$ は R 上の形式スキーム $\mathfrak{X}$ に貼り合う．よって、解析的還元射 $\mathcal{R}ed_X\colon X \to \mathfrak{X}$ も存在する．Pure covering でない affinoid covering の例は、前述の Chapter 1 の例 4.6で考えた $\{U_i\}_{i\geq 0}$ がそうであるし、Chapter 1 の例 4.8にも現れていた．

問題はこの pure covering の存在であるが、これについてはここでは問わないでおく; 実際これは後述する Raynaud の定理の証明の重要な部分である．

さて、一般に Rigid 解析空間とその pure covering が与えられた時、対応する形式モデルがその pure covering の細分に対してどのように振る舞うか、という事を考察する事が後々非常に重要となってくるので、ここで affinoid の場合を例にして具体的に見てみよう: $X = \mathrm{SpA}$ を K 上の affinoid として、$f_0, \ldots, f_n \in \mathrm{A}$ を SpmA 上共通零点を持たない元の列とする．この時、我々は X の rational subdomains

$$U_i = \{x \in X \mid |f_j(x)| \leq |f_i(x)| \text{ for } j \neq i\}$$

による admissible covering $X = \bigcup_i U_i$ を考えるわけであるが、適当に π の巾を一斉に乗じる事で、各 f_i は A° に属するとしてよい．各 i について

$$U_i = \mathrm{SpA}\left\{\frac{f_0}{f_i}, \ldots, \frac{f_n}{f_i}\right\}$$

であるから、対応する形式モデルは

$$\mathfrak{U}_i = \mathrm{Spf}\,\mathrm{A}^\circ\left\{\frac{f_0}{f_i}, \ldots, \frac{f_n}{f_i}\right\} / \left((\pi)\text{−torsions}\right)$$

で与えられる．これらの形式スキームは貼り合って、

$$\bigcup_{0\leq i\leq n} \mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\,\mathrm{A}^\circ$$

は $\mathfrak{a} = (f_0, \ldots, f_n) \subset \mathrm{A}^\circ$ というイデアルに沿った形式ブローアップの格好をしている (cf. 定義 3.2)．そもそも $f_0, \ldots, f_n \in \mathrm{A}$ を SpmA 上共通零点を持たない様に取っていたわけであるが、modulo π では共通零点を持ち得る．実際、$\mathfrak{a}\mathrm{A} = \mathrm{A}$ であるから $\mathfrak{a}$ は何らかの π の巾を含む; 即ち *open ideal* であるという事になる．

この様な、非常に簡単で具体的な観察が示唆する事は:

Slogan (Vague): Pure covering の細分という操作は、その形式モデルの開連接イデアルに沿った形式ブローアップに対応する．

以下に挙げる様々な例のいくつかを検討する事で、我々はこの Slogan の真実性に自信を深めていく事が出来る:

例 2.2. K は代数閉とし、単位円盤 $\mathrm{D}^1 = \mathrm{Sp}K\{T\}$ の被覆 $\mathrm{D}^1 = U_1 \cup U_2$、

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{z \in K \mid |z| \le |\pi|\} &&= \mathrm{Sp}K\left\{\tfrac{T}{\pi}\right\}, \\
U_2 &= \{z \in K \mid |\pi| \le |z| \le 1\} &&= \mathrm{Sp}K\left\{T, \tfrac{\pi}{T}\right\}
\end{aligned}
$$

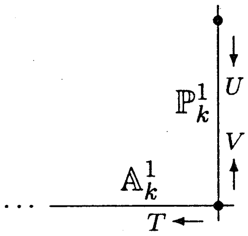
を考えよう. 各々対応する形式モデルは

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{U}_1 &= \mathrm{Spf}\, R\left\{\tfrac{T}{\pi}\right\} &&= \mathrm{Spf}\, R\{T, U\}/(\pi U - T), \\
\mathfrak{U}_2 &= \mathrm{Spf}\, R\left\{T, \tfrac{\pi}{T}\right\} &&= \mathrm{Spf}\, R\{T, V\}/(TV - \pi)
\end{aligned}
$$

であり、$U = V^{-1}$ によって貼り合わされた $\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2 \to \mathfrak{D}^1 = \mathrm{Spf}\, R\{T\}$ はイデアル (π, T) に沿った形式ブローアップである. 他方、解析的還元の方を見ると、これは

$$
\begin{aligned}
\overline{U}_1 &= \mathrm{Spec}\, k[U], \\
\overline{U}_2 &= \mathrm{Spec}\, k[T, V]/(TV)
\end{aligned}
$$

という二つの affine の貼り合わせで、これは座標 T を持つ affine 直線と非同次座標 V を持つ射影直線を、それぞれ原点で正規交差させたものになっている.



例 2.3 (Projective space $\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K$). Chapter 1 の例 4.5で与えた射影直線 $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ の affinoid covering $\{U^+, U^-\}$ を考える. 各々対応する形式モデルは

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{U}_+ &= \mathrm{Spf}\, R\{z\} &&\cong \mathbb{A}^{1\,\wedge}_R, \\
\mathfrak{U}_- &= \mathrm{Spf}\, R\{w\} &&\cong \mathbb{A}^{1\,\wedge}_R
\end{aligned}
$$

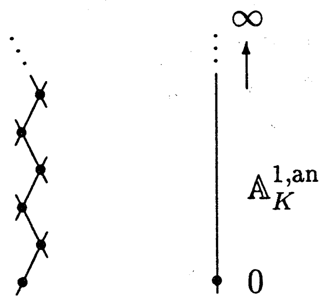
である. ここで $\cdot^\wedge$ は (π)-進完備化を表す. $U^+ \cap U^-$ には、例えば $\mathrm{Spf}\, R\{z, z^{-1}\}$ が対応しているから、$\{U^+, U^-\}$ は pure covering であり、$\mathrm{Spf}\, R\{z, z^{-1}\}$ と $\mathrm{Spf}\, R\{w, w^{-1}\}$ は $w = 1/z$ という関係で貼り合わせられる. これによって $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ の、この covering に関する形式モデルは $\mathbb{P}^{1\,\wedge}_R$ である事がわかる. 解析的還元は k 上の射影直線になる.

例 2.4 (Affine space $\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_K$). Chapter 1 の例 4.6で与えた affine 直線 $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_K$ の、後の方の affinoid covering $\{V_i\}_{i \ge 0}$ を考えよう. 対応する形式モデルは

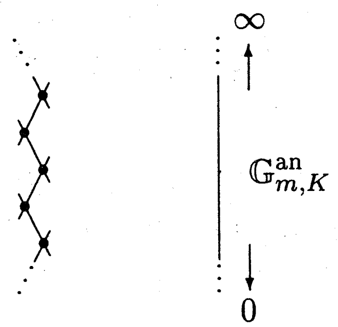
$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_0 &= \mathrm{Spf}\, R\{z\}, \\
\mathcal{V}_i &= \mathrm{Spf}\, R\left\{\tfrac{z}{c^i}, \tfrac{c^{i-1}}{z}\right\} &&\cong \mathrm{Spf}\, R\{u_i, v_i\}/(u_i v_i - c^{-1}) \text{ for } i \ge 1
\end{aligned}
$$

で与えられ、先程と同様にして $\{V_i\}_{i \ge 0}$ が pure covering である事がわかる. 実際に ($u_0 = z$ として) $v_{i+1} = u_i^{-1}$ によってこれらは貼り合う. 従って、$\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_K$ のこの covering に関する形式モデルは (u_i, v_{i+1}) $(i \ge 0)$ という同次座標を持ち、非負整数で番号付け

られた加算個の $\mathbb{P}_R^{1\wedge}$ を、i 番目の ∞ と $i+1$ 番目の 0 で、その還元が正規交差となるように貼り合わせて出来た半直鎖である.



例 **2.5** ($\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}}$). 同様にして考えると、$\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}}$ の Chapter 1 の例 4.7で与えた affinoid covering に関する形式モデルは存在し、これは整数で番号付けられた加算個の $\mathbb{P}_R^{1\wedge}$ を、i 番目の ∞ と $i+1$ 番目の 0 で、その還元が正規交差となるように貼り合わせて出来た直鎖である.

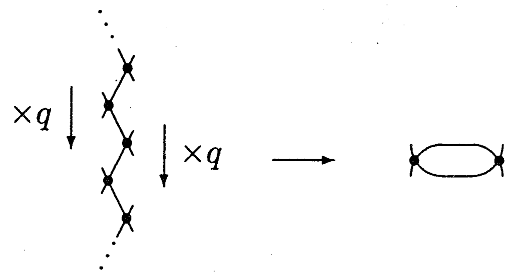


例 **2.6** (Tate 曲線). Chapter 1 の例 4.8で用いた affinoid covering を使って、Tate 曲線の形式モデルを求めてみよう. U_1 及び U_2 に対応する形式モデルは

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{U}_1 &=& \operatorname{Spf} R\left\{\frac{z}{\varpi}, \frac{q}{z}\right\} \;\cong\; \operatorname{Spf} R\{T,S\}/(TS-\varpi), \\ \mathfrak{U}_2 &=& \operatorname{Spf} R\left\{z, \frac{\varpi}{z}\right\} \;\cong\; \operatorname{Spf} R\{X,Y\}/(XY-\varpi) \end{array}$$

である. $U_1 \cap U_2$ において、$\{|z|=|\varpi|\}$ に対応する形式モデルは $\operatorname{Spf} R\left\{\frac{z}{\varpi}, \frac{\varpi}{z}, \frac{q}{z}, \right\}$ 及び $\operatorname{Spf} R\left\{z, \frac{\varpi}{z}, \frac{z}{\varpi}\right\}$ であり、これらは $z \leftrightarrow z$ で同型. また、$\{|z|=|q|\} \cong \{|z|=1\}$ に対応する形式モデルは $\operatorname{Spf} R\left\{\frac{z}{\varpi}, \frac{q}{z}, \frac{z}{q}\right\}$ 及び $\operatorname{Spf} R\left\{z, \frac{1}{z}, \frac{\varpi}{z}\right\}$ であり、これらは $z/q \leftrightarrow z$ で同型である. 従って、$\{U_1, U_2\}$ は pure covering である事がわかり、これに関する E の形式モデルは二つの $\mathbb{P}_R^{1\wedge}$ を、それぞれ ∞ を 0 に、その還元が正規交差する様に貼り合わせたものである. この ϖ の取り方を $\varpi^n = q$ なる様にとり直し、同様に affinoid covering を構成すると、その解析的還元は $\mathbb{P}_k^1$ による n-角形になる. 細分と形式ブローアップとの関連は、ここでも見易い. E の一意化写像 $K^\times \to E$ の適当な pure covering に関する形式モデルは、上の $\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}}$ の形式モデル (これは $\mathbb{P}_R^{1\wedge}$ の直鎖であった) の既約成分を幾つかおきに「折り畳む」という写像になっている. 解析的

還元を模式的に図示すると以下の様になる:



3. RAYNAUD の定理.

この節では、Rigid 解析幾何と形式幾何との間の深い関係を記述する Raynaud の定理を紹介する. まず、Raynaud の定理を述べるために必要な概念の定義から始めよう:

定義 3.1 (Admissible 形式スキーム). R 上の形式スキーム[2]$\mathcal{X}$ が **admissible** であるとは、これが Zariski 局所的に定義 1.5の意味で admissible である A によって $\operatorname{Spf} A$ と同型である事である.

定義 3.2 (Admissible 形式ブローアップ). $\mathcal{X}$ を R 上の admissible な形式スキームとする. この時、$\mathcal{X}$ の **admissible 形式ブローアップ**とは、$\mathcal{X}$ の連接かつ開なイデアル $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ に沿った形式ブローアップ、即ち、

$$\mathcal{X}' = \varinjlim_{\lambda} \operatorname{Proj} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\mathcal{I}^n \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\pi^{\lambda} \right) \longrightarrow \mathcal{X}$$

の事である.

Admissible な形式スキームの圏から Rigid 解析空間の圏に関手を作るために、まず affine $\mathcal{X} = \operatorname{Spf} A$ の場合から考察しよう: この場合、対応する Rigid 解析空間を作る事は易しい. 実際、A に対して

$$A_{\mathrm{rig}} := A \otimes_R K$$

は K 上の affinoid 代数となっている. A が表示 $A = R\{t_1, \ldots, t_n\}/\mathfrak{a}$ を持つなら、A_{rig} の表示が $K\{t_1, \ldots, t_n\}/\mathfrak{a}K\{t_1, \ldots, t_n\}$ で与えられる.

さて、この操作を大域化するためには局所化との可換性を見なければならない. $f \in A$ に対して A の (完備) 局所化 $A\{f^{-1}\}$ を考えよう. 対応する affinoid 代数は

$$\begin{aligned} A\{f^{-1}\} \otimes_R K &= A\{T\}/(1-Tf) \otimes_R K \\ &= A_{\mathrm{rig}}\{T\}/(1-Tf) \quad = \quad A_{\mathrm{rig}}\{f^{-1}\} \end{aligned}$$

[2]形式スキームの定義については [**EGA**, I, §10] に従うものとする.

で、最後の物は

$$\{x \in \mathrm{Sp}A_{\mathrm{rig}} \mid |f| \geq 1\}$$

という rational subdomain に対応する affinoid 代数である. 従って、形式スキームの方での (完備) 局所化は Rigid 解析空間の方では G-位相に関する局所化に対応しており、従って、我々は R 上の任意の admissible な形式スキーム $\mathfrak{X}$ に K 上の Rigid 解析空間を対応させる関手

$$\mathrm{Rig}\colon \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}}$$

を構成出来る. $\mathfrak{X}_{\mathrm{rig}}$ は $\mathfrak{X}$ の **Raynaud 一般ファイバー**と呼ばれる.

命題 3.3. 上で構成した関手 Rig は admissible な形式スキームの admissible 形式ブローアップを Rigid 解析空間の同型射に写す.

証明. これは既に前節 (Slogan の直前) において本質的に示されている. 実際、admissible 形式ブローアップの中心は連接開イデアルであるから、affine の場合を見れば十分である. A を admissible な R 代数とし、$\mathsf{A} = A \otimes_R K$ とする.

$$\bigcup_{0 \leq i \leq n} \mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\, A, \quad \mathfrak{U}_i = \mathrm{Spf}\, A\left\{\frac{f_0}{f_i}, \ldots, \frac{f_n}{f_i}\right\} / ((\pi)\text{-torsions})$$

を admissible 形式ブローアップとすれば、各 $\mathfrak{U}_i$ の Raynaud 一般ファイバーは $X = \mathrm{Sp}\mathsf{A}$ の rational subdomain $U_i = \{x \in X \mid |f_j(x)| \leq |f_i(x)| \text{ for } j \neq i\}$ であり、$\{U_i\}_{0 \leq i \leq n}$ は X の admissible covering である. 従って、admissible 形式ブローアップの Raynaud 一般ファイバーは対応する affinoid の rational subdomains の和への分解に他ならない. □

では、この章の目標であった Raynaud の定理を述べよう:

定理 3.4 (Raynaud 1974). 関手 Rig により、次の圏の間の圏同値が得られる:

(1) R 上の quasi-compact な admissible 形式スキームの圏を admissible 形式ブローアップで局所化して出来る圏.

(2) quasi-compact かつ quasi-separated[3] な K 上の Rigid 解析空間の圏.

この定理の証明のためには以下の事を見る必要がある:

(i) Rig は admissible 形式ブローアップを同型射に写す、

(ii) 二つの quasi-compact な admissible 形式スキーム $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ と、その Raynaud 一般ファイバー間の射 $\varphi_K\colon \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{rig}}$ が与えられると、admissible 形式ブローアップ $\tau\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ と $\varphi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$ が存在して $\varphi_{\mathrm{rig}} = \varphi_K \circ \tau_{\mathrm{rig}}$ を満たす、

(iii) 任意に quasi-compact かつ quasi-separated な Rigid 解析空間 X が与えられると、$\mathfrak{X}_{\mathrm{rig}} \cong X$ なる quasi-compact な admissible 形式スキーム $\mathfrak{X}$ が存在する.

[3] Rigid 解析空間の quasi-compact 性や quasi-separated 性等の定義は次章で一括して述べる.

(i) は既に命題 3.3で見た. (iii) は結局のところ、前節に導入した pure covering の存在を主張している部分で、正確には、**任意の affinoid covering は必ず pure covering に細分される**という事を主張している. (ii) にせよ (iii) にせよ、結局十分ブローアップをすれば云々という事を物語っているわけであるから尤もらしい感じのする主張であるが、きちんと証明するのは容易ではない. この定理の証明については、[**Bosch, Lütkebohmert 1993**] において丁寧でわかりやすい証明がなされているので、そちらを参照されたい.

CHAPTER 3

RIGID 解析幾何学.

この章では Rigid 解析空間にまつわる幾何学的な概念についてまとめる. その手始めとして、§1 では Rigid 解析空間の G-位相について若干踏み込んだ議論をする; この節では、Rigid 解析特有の興味深い位相的状況が明らかになる. §2 では Rigid 解析に現れる射の基本的な性質についてまとめた. §3 では連接層及びそれを係数としたコホモロジーについて簡単に述べる. 最後に §4 で古典的複素解析幾何の場合の類似である GAGA-principle について論じる.

1. RIGID 解析空間の GROTHENDIECK 位相.

まず、我々は少々デリケートな G-位相の議論から始める:

定義 1.1 (強 G-位相). X を Rigid 解析空間とし $(\mathcal{T}, \mathcal{C}ov)$ をその G-位相とする. この時、X の**強 G-位相**とは、次の様に定義される G-位相 $(\mathcal{T}^{\mathrm{st}}, \mathcal{C}ov^{\mathrm{st}})$ の事である:

(1) X の開集合 V が admissible であるとは X の rational subdomain による開被覆 $V = \bigcup_{i\in I} U_i$ が存在して、任意の射 $\varphi\colon \mathrm{SpB} \to X$ でその像が V に入るものについて $\mathrm{SpB} = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(U_i)$ が有限部分被覆を持つ事である.

(2) Admissible な開集合 V の admissible な開集合からなる被覆 $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ が admissible であるとは、任意の射 $\varphi\colon \mathrm{SpB} \to X$ でその像が V に入るものについて $\mathrm{SpB} = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(V_i)$ は SpB の rational subdomains からなる有限被覆に細分される事である.

強 G-位相の利点は、従来の $(\mathcal{T}, \mathcal{C}ov)$ においては rational subdomain に限られていた admissible open の概念が、他の幾何学的に興味ある部分空間をも含む様に拡張されているという点である. 例えば、affinoid $X = \mathrm{SpA}$ において次の様な部分集合は全て強 G-位相に関して admissible open である: $f \in \mathrm{A}$ について

$$\{x \in X \mid |f(x)| < 1\}, \quad \{x \in X \mid |f(x)| > 1\}, \quad \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

強 G-位相 $(\mathcal{T}^{\mathrm{st}}, \mathcal{C}ov^{\mathrm{st}})$ に対して、今までの G-位相 $(\mathcal{T}, \mathcal{C}ov)$ は弱 G-位相と呼ばれる. 弱 G-位相に関して定義されていた構造層を強 G-位相について層化する事で強 G-位相についての構造層を得る. 以下、**Rigid 解析空間の G-位相は特に断りない限り**

は従来通り弱 G-位相を指すものとするが、強 G-位相について議論する必要がある時はこれを明記する事とする.

弱 G-位相に関しては、例えば Chapter 1 の §4 で見た $\mathbb{A}_K^{n,\mathrm{an}}$ は $\mathbb{P}_K^{n,\mathrm{an}}$ の部分解析空間とは見なせないのであるが、強 G-位相に関してはこれが $\mathbb{P}_K^{n,\mathrm{an}}$ の admissible open となるのでそれが可能である. 一般に、Rigid 解析空間 X の強 G-位相に関する admissible open set U は、その誘導された G-位相及び解析構造を持ち、Rigid 解析空間となる. これは**開部分解析空間**と呼ばれる. また、Rigid 解析空間の射 $Y \to X$ はそれが Y と X の開部分解析空間との同型を誘導する時、**開埋め込み**と呼ばれる.

定義 1.2 (quasi-compact 性). X を位相空間とし、$(\mathcal{T}, \mathcal{C}ov)$ をその G-位相とする. この時、X が G-位相に関して **quasi-compact** であるとは、X の任意の admissible covering が有限 admissible subcovering を持つ事である.

我々はこの定義を Rigid 解析空間の強 G-位相に関して適用しよう[1]. 我々は affinoid SpA においては、その強 G-位相に関する admissible covering を最初から有限被覆に細分出来るものに限定していたから、容易にわかる様に Rigid 解析空間 X が quasi-compact であるとは X が有限 affinoid covering を持つ事に他ならない. 特に affinoid は必ず quasi-compact である. また、Chapter 1 の §4 で見た例について言えば、$\mathbb{P}_K^{n,\mathrm{an}}$ や Tate 曲線は quasi-compact であるが、$\mathbb{A}_K^{n,\mathrm{an}}$ や $\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}}$ は quasi-compact でない.

以下、この節の終りまで Rigid 解析空間の連結性と単連結性について論じる:

定義 1.3 (連結性). X を一般の G-位相空間としよう. この時、X が G-位相に関して**連結**であるとは、X の任意の admissible covering $\{U_i\}_{i\in I}$ について、

$$\bigcup_{i\in I_1} U_i \cap \bigcup_{i\in I_2} U_i = \emptyset \text{ and } \bigcup_{i\in I_1} U_i \neq \emptyset \neq \bigcup_{i\in I_2} U_i$$

となる様な分割 $I = I_1 \sqcup I_2$ が存在しない事である.

次の補助定理は普通の位相空間論の場合と全く同様に証明出来る:

補助定理 1.4. X_1, X_2 を G-位相空間 X の連結な部分集合として、$X_1 \cap X_2$ は空でないとする. この時、$X_1 \cup X_2$ は連結である.

Rigid 解析空間の連結性については、上の定義を強 G-位相に関して適用する事にしよう.

命題 1.5. K 上の affinoid SpA が連結であるための必要十分条件は A が非自明な巾等元を持たない事である.

[1]弱 G-位相に適用しても同じである、つまり、強 G-位相に関して quasi-compact である事と、弱 G-位相に関して quasi-compact である事は同値である事が容易にわかる.

証明. 実は弱 G-位相に関する連結性と強 G-位相に関する連結性は同値である事が知られている ([**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 9.1.4.8]). 従って、我々はこれを弱 G-位相に関して証明すれば良い. X が非連結とし、$X = X_1 \sqcup X_2$ を各 X_i が rational subdomain の有限和である様な分割とすると、X_1 上 1 をとり X_2 上 0 をとる関数 e は A の元である. 逆に A が巾等元 $e \neq 0, 1$ を持つとすると、任意の $x \in \mathrm{SpA}$ について $|e(x)|^2 = |e(x)|$ であるから $|e(x)| = 0, 1$ である. この時、$1 - e$ も非自明な巾等元であることから $X_1 = \{|e(x)| = 0\}$ と $X_2 = \{|e(x)| = 1\}$ は共に空でない rational subdomain で、その交わりは空である. □

従って、例えば閉円盤や閉アニュラス等は連結である; そもそもこれらは全不連結であったという事を思い起こすと、G-位相によってもたらされた位相に関する影響の大きさが感じられる. また、Chapter 1 の §4 で見た例は全て連結である事もわかる.

その影響の大きさの極めつけは単連結性に関する事である. 以下にそれを見ていこう:

定義 1.6 (解析的被覆写像と単連結性). Rigid 解析空間の射 $\varphi\colon Y \to X$ は、X の強 G-位相に関する admissible covering $\{X_i\}_{i \in I}$ で、各 $i \in I$ について $\varphi^{-1}(X_i)$ が X_i のコピーの disjoint union に同型である様なものがとれる時、**解析的 (不分岐) 被覆写像** (analytic covering map) と呼ばれる. 連結な Rigid 解析空間 X が、自明な解析的被覆写像 $\mathrm{id}\colon X \to X$ より他に連結な Rigid 解析空間からの解析的被覆写像を持たない時、**単連結**と呼ばれる (cf. [**van der Put 1987**]).

例えば、Tate 曲線 (Chapter 1 の例 4.8) はその一意化写像 $K^\times \to E$ が解析的被覆写像となっている (K は代数的閉体とする); 実際、Chapter 1 の例 4.8で導入した affinoid covering $\{U_1, U_2\}$ を考えれば、各 U_i の $K^\times \to E$ に関する引き戻しは加算個のアニュラスの交わりを持たない和となっている. 特に Tate 曲線は単連結ではない.

補助定理 1.7. X を連結な Rigid 解析空間とする.

(1) X が単連結であるための必要十分条件は、任意の強 G-位相に関する局所定数層が定数層である事である.

(2) X が次を満たす様な強 G-位相に関する admissible covering $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を持つとき、X は単連結である : (a) 各 X_i は単連結、(b) 各 i について $X_i \subseteq X_{i+1}$.

証明は簡単なので省略する. 我々は以下に $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ の開部分 Rigid 解析空間について考えよう. Chapter 1 の例 3.6で見た様に、$\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ の rational subdomain は standard domain と呼ばれる比較的扱いやすいものに細分されるのであった.

命題 1.8. Standard domain は連結である. また、連結な rational subdomain は単連結である.

証明. まず、standard domain

$$\{x \in \mathrm{Sp}K\{t\} \mid |t-a| \leq |\varpi|, |t-a_i| \geq |\varpi_i| \text{ for } i=1,\ldots,s\}$$

が連結である事は対応する affinoid 代数

$$K\{t,t_0,\ldots,t_s\}/((t-a)-t_0\varpi, \varpi_i - t_i(t-a_i) \text{ for } i=1,\ldots,s),$$

$(a, a_i \in K,\ \varpi, \varpi_i \in K)$ が整域である事から命題1.5によりすぐわかる. さて、rational subdomain R の単連結性であるが、これは補助定理 1.7 (1) を使って証明する. $\mathcal{F}$ を R 上の局所定数層としよう. 強 G-位相の定義から、$\mathcal{F}$ を自明化する R の admissible covering $\{S_i\}_{i\in I}$ として standard domain からなる有限被覆をとる事が出来る. 証明の一番のポイントは、何しろ $S_i \cap S_j$ はこれが空でないなら再び standard domain であるから連結であり、従って、制限射 $\mathcal{F}(S_i) \to \mathcal{F}(S_i \cap S_j)$ は $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ なる限りにおいて全単射である、という事である. 従って、$\mathcal{F}(S_i \cup S_j) \to \mathcal{F}(S_i)$ も全単射となり、この議論を繰り返す事で $\mathcal{F}$ が定数層である事がわかる. □

次の結果にはちょっとびっくりさせられる:

系 1.9. $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ の任意の連結開部分解析空間は単連結である.

証明. そのような連結開部分解析空間 U は standard domain からなる affinoid covering を持ち、また、[**Gerritzen, van der Put 1980**, III,2.6] 及び補助定理 1.4より有限個の standard domain の交わりを持つ和は連結な rational subdomain である. よって、補助定理 1.7 (2) 及び命題 1.8より題意が従う. □

上で、Tate 曲線の一意化写像 $K^\times \to E$ が解析的被覆写像となっている事を述べたが、この系により $K^\times$ は単連結であるからこれは**普遍被覆**となっている事がわかる.

実は次の様な事実も知られている:

定理 1.10 (van der Put 1987). X を quasi-compact な K 上の Rigid 解析空間とし、これが既約かつ smooth な解析的還元を持つものとする. この時、X は単連結である.

証明は [**van der Put 1987**] を参照. この事実から頷ける事として、もし K 上の楕円曲線 E が (代数的に) good reduction を持つなら、これは決して Tate 曲線にはなり得ないという事が挙げられる. 実際、代数的に閉である K 上の楕円曲線 E が Tate 曲線となるための必要十分条件は、その j-普遍量が $|j(E)| > 1$ を満たす事である事が知られている (cf. [**Tate 1971**]).

2. 射の局所的及び大域的性質.

この節では、以前の、あるいはこの後の議論で用いる用語の説明を行う. 紙面の関係上あまり多くの例を引く事はしないが、以下の様々な概念に関する例、更にはもっと系統的な説明に関しては、各所に示されている引用文献を参照のこと.

最初に射の smooth 性や étale 性から始めよう. これらの定義については様々な流儀があるが、次の定義は [**Huber 1996**] からの引写しである:

定義 2.1 (Étale 射と smooth 射). $f\colon X \to Y$ を K 上の Rigid 解析空間の間の射とする.

(1) f が平坦であるとは、各点 $x \in X$ について $\mathcal{O}_{X,x}$ が $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ 上平坦である事を意味する.

(2) f が**étale** であるとは、f が平坦であり各点 $x \in X$ について $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{Y,f(x)}\mathcal{O}_{X,x}$ が $\mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{Y,f(x)}$ の有限分離拡大となっている事である.

(3) f が **smooth** であるとは、各点 $x \in X$ についてそれを含む admissible open set U が存在し、それへの制限 $f|_U\colon U \to Y$ が étale 射 $U \to Y \times \mathrm{D}^n$ 及び射影 $Y \times \mathrm{D}^n \to Y$ に分解する事である. ただし、ここで $\mathrm{D}^n = \mathrm{Sp}K\{t_1, \ldots, t_n\}$.

Étale 射の最も簡単な例としては、前節に導入した解析的被覆写像があげられる. 実際、これは局所同型であるから各点での構造層の stalk 間の同型を引き起こす.

注意 2.2. ここで注意するべき事は: 一般に解析的被覆写像は étale 射であるが**逆は真でないという事**である. 例えば、簡単のため K を代数的閉として n 乗写像 $K^\times \to K^\times$ (ただし、n は K の標数で割れない自然数とする) を考えると、これは各点での構造層の stalk 間の同型を誘導するから明らかに étale 射であるが、しかし前節に見た様に $K^\times$ は <u>単連結</u> なのであったから、これは解析的被覆とはなり得ない. この例が示唆する様に、Rigid 解析空間の間の射は、たとえそれが各点の構造層の stalk 間の同型を誘導しても G-位相の意味では「局所同型」とはならない; ここで我々は再び G-位相における「局所的」の意味を認識させられる. Chapter 1 の §1 にて詳説した様に「局所的」とはあくまでも admissible covering をとって議論されるものであった. n 乗写像 $K^\times \to K^\times$ から引き起こされる構造層の stalk 間の同型から、確かに各点のまわりで十分小さな rational subdomain がとれて、その上でこの射が同型である様にする事が出来る. しかしながら、こうして得られた近傍の族が admissible covering となるとは限らないのである.

次の事実は [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 7.3.2.3] と可換代数の知識から直ちに従う:

命題 2.3. (1) $\mathrm{SpB} \to \mathrm{SpA}$ が平坦であるための必要十分条件は B が A-代数として平坦である事である.

(2) $\mathrm{SpA} \to \mathrm{Sp}K$ が étale であるための必要十分条件は A が K の有限次分離拡大の有限個の積となっている事である.

前節で既に我々は Rigid 解析空間の開埋め込みは定義したが、次に閉埋め込みと有限射について論じよう:

定義 2.4 (閉埋め込みと有限射). (1) K 上の affinoid の射 $f\colon \mathrm{SpB} \to \mathrm{SpA}$ が**閉埋め込み** (resp. **有限射**) であるとは、対応する affinoid 代数の射 $f^*\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ が全射 (resp. 有限) である事である.

(2) 一般の Rigid 解析空間の射 $f\colon X \to Y$ が**閉埋め込み** (resp. **有限射**) であるとは、Y の admissible covering $\{V_i\}_{i\in I}$ が存在して、$f^{-1}(V_i) \to V_i$ が (1) の意味で affinoid 間の閉埋め込み (resp. 有限) 射となっている事である[2].

定義 2.5 (分離性). Rigid 解析空間の射 $f\colon X \to Y$ が **separated** であるとは、誘導された対角射 $X \to X \times_Y X$ が閉埋め込みとなっている事である.

Separated 性の判定条件として、以下は便利である:

命題 2.6. Rigid 解析空間の射 $f\colon X \to Y$ で、Y が affinoid であるものが separated であるための必要十分条件は次の二つの条件が満足させられる事である:

(1) 対角射 $X \to X\times_Y X$ の像は解析的部分集合、即ち、適当な admissible covering をの各メンバー上で有限個の関数の零点となっている.

(2) X の admissible covering $\{X_i\}_{i\in I}$ を適当にとると、各交わり $X_i \cap X_j$ が rational subdomains の有限個の和になっている.

証明は [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 9.6.1.7] を参照. 特に上の条件 (2) だけが満足されるとき、$f\colon X \to Y$ は **quasi-separated** と呼ばれる. この概念は Chapter 2 の最後に述べた Raynaud の定理を述べるために必要な概念であった.

最後に射の固有性 (properness) について述べる. この概念は次の節で連接層を係数としたコホモロジーの有限性を述べるために必要な概念である. 以下の定義は Kiehl によるものである:

定義 2.7 (相対コンパクト性). $f\colon X = \mathrm{SpA} \to \mathrm{SpB}$ を affinoid の間の射とし、U を X の rational subdomain とする. この時、U が Y 上 X の中で**相対コンパクト**であるとは、A の元の有限列 $f_1, \ldots, f_n$ で以下を満たすものがとれる事である:

(1) B-代数としての準同型

$$\mathrm{B}\{t_1, \ldots, t_n\} \longrightarrow \mathrm{A} \quad \text{sending} \quad T_i \mapsto f_i$$

は全射である.

(2) $U \subset \{x \in X \mid |f_1(x)| < 1, \ldots, |f_n(x)| < 1\}$.

U が Y 上 X の中で相対コンパクトである事を $U \Subset_Y X$ と書く.

相対コンパクト性は基底変換やファイバー積について閉じている概念である事は容易にわかる.

[2] 我々は Rigid 解析空間の射は弱 G-位相に関して定義していたので、rational subdomain の引き戻しは rational subdomain である.

定義 2.8 (固有性). Rigid 解析空間の射 $f\colon X \to Y$ が固有であるとは、次の 2 条件が満足される事を意味する:

(1) f は separated である.

(2) Y の affinoid covering $\{Y_i\}_{i\in I}$ 及び各 i について $f^{-1}(Y_i)$ の有限 admissible coverings $\{X_{i_j}\}_{1\leq j\leq n_i}$ $\{X'_{i_j}\}_{1\leq j\leq n_i}$ が存在して、各 j について $X'_{i_j} \Subset_{Y_i} X_{i_j}$ となる.

例えば、Chapter 1 の例 4.5で考えた射影直線 $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ は SpK 上固有である; 実際、そこで与えた affinoid covering $\{U^+, U^-\}$ は各々半径 1 の閉円盤と捉えられていたが、これらの半径を若干大きくしても affinoid covering を得るからである. 同様の考察により、Tate 曲線もまた SpK 上固有である事がわかる.

3. 連接層とコホモロジー.

A を K 上の affinoid とし、M を有限 A-加群とする. この時、SpA の各 rational subdomain U に対して対応

$$U = \mathrm{SpA}_U \mapsto M \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_U$$

を考える事により、前層 $M^\sim$ が得られる. Chapter 1 の定理 4.3で構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{SpA}}$ について紹介した Tate の Acyclicity Theorem はこの場合についても正しく、前層 $M^\sim$ は層となる (cf. [**Bosch, Güntzer, Remmert 1984**, 8.2.1.5]). $M^\sim$ は A-加群 M に associate した $\mathcal{O}_{\mathrm{SpA}}$-加群と呼ばれる. 対応 $M \mapsto M^\sim$ によって A 上の有限加群の圏から $\mathcal{O}_{\mathrm{SpA}}$-加群の圏の充満部分圏への圏同値が得られる.

定義 3.1 (連接層). X を K 上の Rigid 解析空間とし、$\mathcal{M}$ を $\mathcal{O}_X$-加群とする. $\mathcal{M}$ が**連接 $\mathcal{O}_X$-加群**であるとは、X の affinoid covering $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して、$\mathcal{M}$ の各 $U_i = \mathrm{SpA}_i$ への制限が A_i 上の有限加群 M_i によって $M_i^\sim$ と書ける $\mathcal{O}_{U_i}$-加群に同型である事である.

X が affinoid SpA の場合には、その上の連接 $\mathcal{O}_X$-加群とは A 上の有限加群に associate した $\mathcal{O}_X$-加群に他ならない事が知られている (cf. [**Kiehl 1967(2)**, §1]).

Rigid 解析空間 X 上の $\mathcal{O}_X$-加群の圏には十分多くの単射的対象が存在する. 従って、これらに対して適当な加法的関手の導来関手を考える事が出来る. 次の定理は [**Kiehl 1967(1)**, §3] からの引用である:

定理 3.2 (Endlichkeitssatz). $f\colon X \to Y$ を Rigid 解析空間の間の固有な射とし、$\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_X$-加群とする. この時、任意の自然数 $i \geq 0$ について

$$\mathrm{R}^i f_* \mathcal{F}$$

は連接 $\mathcal{O}_Y$-加群である.

系 3.3. X が K 上固有な Rigid 解析空間とし、$\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_X$-加群とすると、任意の自然数 $i \geq 0$ について

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$$

は有限次元 K-線形空間である.

実際のコホモロジーの計算には、代数幾何の場合と同様にČech コホモロジーが使われる. Tate の Acyclicity Theorem から、Čech コホモロジーは affinoid covering を充分細かくとれば層係数コホモロジーと一致する. 以下に、Čech コホモロジーによる計算例を示そう:

例 3.4 (射影直線の層係数コホモロジー). Chapter 1 の例 4.5で考えた射影直線 $X = \mathbb{P}_K^{1,\mathrm{an}}$ の acyclic affinoid covering $\{U^+, U^-\}$ について、構造層 $\mathcal{O}_X$ のコホモロジーを考えよう. まず、$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X)$ は U^+ のパラメーター z についても U^- のパラメーター $w = 1/z$ についてもについても Taylor 展開可能な正則関数全体であるから $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X) = K$ である. $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$ は $U^+ \cap U^- = \mathrm{Sp}K\{z, z^{-1}\}$ 上の正則関数、即ち z に関してローラン展開可能な関数の同値類であり、$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ が容易に計算される. また、従来の代数幾何や複素解析幾何の場合と同様に $\mathcal{O}_X(n)$ という連接層を考える事が出来、これらのコホモロジーも容易に計算され、代数幾何でよく知られた結果に一致する (勿論、$\mathbb{P}_K^n$ でも同様である).

例 3.5 (Tate 曲線のコホモロジー). Chapter 1 の例 4.8で与えた Tate 曲線 E の affinoid covering $\{U_1, U_2\}$ は acyclic covering であるので、これによって構造層のコホモロジーを計算出来る. この場合も計算は容易であり、$\mathrm{H}^0(E, \mathcal{O}_E) = K$ は直ちにわかる. また、この場合 $U_1 \cap U_2$ は二つの連結成分を持っている事から $\mathrm{H}^1(E, \mathcal{O}_E) = K$ である事がわかる.

4. GAGA PRINCIPLE.

この節では、Chapter 2 で考察した Rigid 解析空間と形式スキームの関連に基づいて議論したいので、記号は Chapter 2 の記号 1.1に従うものとする. また、我々は **R は Noetherian であると仮定する**; 従って、K は代数閉体ではない.

まず、一般に Y を R 上の局所有限型スキームとする. これまでの内容から、我々は Y に対して二通りの方法で次の様な二つの Rigid 解析空間を構成出来る:

(1) Y の一般ファイバー Y_K から Chapter 1 の定理 4.9の方法で構成される Y_K^{an}.
(2) Y の (π)-進完備化 $Y^\wedge$ から Chapter 2 の §3 の方法で構成される Raynaud 一般ファイバー $Y^\wedge_{\mathrm{rig}}$.

後者のもの $Y^\wedge_{\mathrm{rig}}$ には形式スキーム $Y^\wedge$ の Zariski 開被覆から来る pure covering があるので、解析的還元射 $\mathcal{R}ed\colon Y^\wedge_{\mathrm{rig}} \to Y^\wedge$ が存在する. これらの関係については以下の事実がある:

定理 4.1. 自然な Rigid 解析空間の射 $f\colon Y_K^{\mathrm{an}} \to Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge}$ で、次の環付 site の図式が可換になる様なものが存在する:

$$\begin{array}{ccc} Y_K & \xrightarrow{\mathrm{i}} & Y \\ {\scriptstyle \mathrm{j}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{r}} \\ Y_K^{\mathrm{an}} & \xrightarrow[f]{} & Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge}. \end{array}$$

ただし、ここに i は自然な埋め込み、r は解析的還元射 $\mathcal{R}ed\colon Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge} \to Y^{\wedge}$ と自然な環付 site の射 $Y^{\wedge} \to Y$ の合成である. また、j は Chapter 1 の定理 4.9において導入した射である. もし Y が分離的かつ有限型なら f は開埋め込みであり、さらに Y が R 上固有なら f は同型である.

これについては [**Berthelot**, 0.3.5] 及びその証明を参照のこと.

さて、X を $\mathbb{P}_K^n$ の閉部分多様体とし、Y でその $\mathbb{P}_R^n$ 内での閉包を表す. 一般にスキーム、形式スキーム、もしくは Rigid 解析空間 Z に対し、その上の連接層のなす圏を $\mathsf{Coh}(Z)$ と書くものとし、圏 $\mathsf{Coh}(Z)$ を π 倍するという射を可逆にするように局所化したものを $\mathsf{Coh}(Z)_\pi$ と書くことにしよう. この時、我々は次の二つの事実を知る:

(1) [**EGA**, Chap. III, 5.1.6] より $\mathsf{Coh}(Y) \cong \mathsf{Coh}(Y^{\wedge})$ である.
(2) 自然な包含射 $\mathrm{i}\colon X \to Y$ によって $\mathsf{Coh}(X) \cong \mathsf{Coh}(Y)_\pi$ である.

命題 4.2. 解析的還元射 $\mathcal{R}ed\colon Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge} \to Y^{\wedge}$ によって圏同値 $\mathsf{Coh}(Y^{\wedge})_\pi \cong \mathsf{Coh}(Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge})$ が導かれる.

証明. $Y^{\wedge}$ の Zariski 開被覆、及びそれより誘導された $Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge}$ の pure covering を考えて、問題は $Y^{\wedge}$ が affine の場合に帰着される. $Y^{\wedge} = \mathrm{Spf}\, A$ として、$Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge} = \mathrm{Sp} A_{\mathrm{rig}}$ ($A_{\mathrm{rig}} = A \otimes_R K$) としよう. $Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge}$ 上の連接層は、前節で述べた [**Kiehl 1967(2)**, §1] の事実から、A_{rig} 上の有限加群 M によって $M^{\sim}$ と書けるのであった. ところで、M は A_{rig} 上の有限加群であるから、適当なモデルをとる事で A 上の有限加群が得られ、これによって $\mathrm{Spec}\, A$ 上の連接層が考えられる. ここで、[**EGA**, Chap. III, 5.1.6] により我々は (π 倍を除いて) $Y^{\wedge}$ 上の連接層を得る. 逆に $Y^{\wedge}$ 上の連接層は有限 A-加群 M によって $M^{\triangle}$ と書けるので、対応する $(M \otimes_R K)^{\sim}$ は $Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge}$ 上の連接層である. 以上により命題が従う. □

そこで、定理 4.1の中に記した図式に対応して、以下の圏の図式を考えよう:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Coh}(X) & \xleftarrow{\mathrm{i}^*} & \mathsf{Coh}(Y)_\pi \\ {\scriptstyle \mathrm{j}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{r}^*} \\ \mathsf{Coh}(X^{\mathrm{an}}) & \xleftarrow[f^*]{} & \mathsf{Coh}(Y_{\mathrm{rig}}^{\wedge})_\pi. \end{array}$$

上に述べた事から i^* と r^* は圏同値を導く．定理 4.1により f は同型であるから f^* もまた圏同値である．従って、圏同値

$$\mathsf{j}^*\colon \mathsf{Coh}(X^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \mathsf{Coh}(X)$$

が得られる．よって、次の定理が成り立つ事がわかる:

定理 4.3 (GAGA-principle)**.** 射影代数多様体 X 上の連接 $\mathcal{O}_X$-加群の圏と、対応する Rigid 解析空間 X^{an} 上の連接 $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-加群の圏との間には自然な圏同値が存在する．

これから直ちに従う事として、複素解析の場合と同様に次がある:

系 4.4 (Chow の定理の Rigid 版)**.** Rigid 解析的射影空間 $\mathbb{P}_K^{n,\mathrm{an}}$ の解析的閉部分多様体は射影部分代数多様体である．

CHAPTER 4

p-進一意化と MUMFORD 曲線.

この章では、冒頭に掲げた Tate 曲線の一意化の一般化を与える、いわゆる p-進一意化の理論を Rigid 解析幾何学の立場から紹介する. 「p-進一意化」という操作も、複素解析の時と同様に何らかの解析空間 (対称空間) を離散群で割るという操作なのであるが、以下で説明する p-進の場合の特徴は、解析的還元を通じて、その商をとるという操作の有様が Bruhat-Tits building という比較的扱いやすい組み合わせ論的な対象を見る事で具体的に捉えられるという点である. これは、複素解析の場合にはなかった p-進一意化理論の大きな利点で、これによって、例えば例 3.6 に示すような具体的な計算が可能になっているという醍醐味がある.

この章では K は常に完備離散付値体、R はその付値環、π は素元を表すものとし、その剰余体 $k = R/\pi R$ は q 個の元からなる有限体であると仮定する.

1. BRUHAT-TITS BUILDING.

まず、p-進対称空間を構成する上での基礎となる Bruhat-Tits building と呼ばれる単体的複体について述べよう.

$V = \bigoplus_{i=0}^{n} K \cdot \mathrm{X}_i$ を $n+1$ 次元の K-線型空間とする. V の中の**格子**とは V の R-部分加群で、K 上 V を生成するもの、即ち階数 $n+1$ のものの事である. R が単項イデアル整域であるからこれは自由加群である. 二つの格子 M_1 と M_2 が相似であるとは、$M_1 = \lambda M_2$ なる $\lambda \in K^{\times}$ が存在する事とし、この相似関係に関する格子の同値類を、例えば $[M]$ の様に表す. また、R 上 $\mathrm{e}_0, \dots, \mathrm{e}_n \in V$ で生成される格子の同値類を $[\mathrm{e}_0, \dots, \mathrm{e}_n]$ と書く事にしよう. 我々は V の中の格子の相似関係に関する同値類の全体からなる集合を Δ_0 と書く事とする.

集合 Δ_0 には以下の要領で距離関数 $\mathrm{d}\colon \Delta_0 \times \Delta_0 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定義される: $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \Delta_0$ とし Λ_1 の代表元 $M_1 \in \Lambda_1$ をとると、

$$M_1 \supseteq M_2 \not\subseteq \pi M_1$$

となる Λ_2 の代表元 $M_2 \in \Lambda_2$ が唯一とれる. 同様に考えると

$$M_2 \supseteq \pi^d M_1 \not\subseteq \pi M_2$$

なる整数 d が唯一とれる．この d は最初の $M_1 \in \Lambda_1$ の取り方には依存しない事は容易にわかる．そこで我々は $\mathrm{d}(\Lambda_1, \Lambda_2) = d$ と定義するわけである．もし $\mathrm{d}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 1$ なる時は、Λ_1 と Λ_2 は**隣接**すると呼ばれる．

定義 1.1. 代数群 $\mathrm{PGL}(n+1, K)$ に関する **Bruhat-Tits building** Δ とは、以下の様に定義される有限次元単体的複体の事である:

(1) Δ の頂点全体は Δ_0 である．
(2) Δ_0 の有限部分集合 $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l\}$ が l-単体をなすための必要十分条件は、すべての $i \neq j$ について Λ_i と Λ_j が隣接する事である．

(2) の条件は次の様にも言い換えられる: $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l\}$ が l-単体をなすための必要十分条件は、適当に添字を入れ替えて、適当に代表元 $M_i \in \Lambda_i$ をとれば

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_l \supsetneq \pi M_0$$

となる事である．この最後の特徴付けからわかる事であるが、一つの頂点 Λ_0 を固定した時、これを頂点にもつ Δ の l-単体全体と、$n+1$ 次元の k-線型空間 $V_0 = \bigoplus_{i=0}^{n} k \cdot \mathrm{X}_i$ の長さ $l+1$ の旗全体との間に 1 対 1 対応がある事がわかる．実際上の様な列があると、$\overline{M}_i = M_i / \pi M_0$ とする事で V_0 の旗

$$\overline{M}_0 \supsetneq \overline{M}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{M}_l \supsetneq 0$$

を得るし、準同型定理からこれは逆に辿れるのである．

この様な簡単な考察から Δ について以下の性質がわかる:

(1) Δ は n 次元の局所有限単体的複体である．
(2) Δ のいかなる単体も最大次元 ($= n$ 次元) 単体の面である．

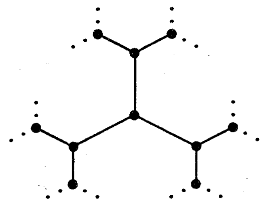
更にその作り方から、Δ の頂点には自然に $\mathrm{PGL}(n+1, K)$ が作用するから

(3) $\mathrm{PGL}(n+1, K)$ は Δ に単体的に作用する．

Bruhat-Tits building Δ について理解を深めるために、低次元の場合についてその有様を詳しく見てみよう:

例 1.2 ($n = 1$)**.** 1 次元の場合、Δ の頂点 Λ_0 を任意に固定すると、それに隣接した頂点は k-平面 V_0 の原点を通る直線全体、つまり $\mathbb{P}^1_k$ の k-有理点全体と 1 対 1 に対応する．従って、各頂点からは $q+1$ 個の辺が出ている．実はこれは**樹木** (tree) となって

いる事が知られている. $q=2$ の場合の様子を図示すると、こんな感じになる:



図には書き切れないのであるが、実はこれは可算無限個の頂点を持っており、その各頂点からは 3 つの辺が出ている; これは、しかも tree なのであるから、決して輪体を含まない.

実は一般に Bruhat-Tits building Δ の幾何学的実現 $|\Delta|$、即ち、各単体に対応して Euclid 空間内の基本単体を考えつなぎ合わせたものは可縮である事が知られている (cf. [**Brown 1989**]).

例 1.3 ($n=2$). 2 次元に次元が上がると、その様相は結構複雑になる. Δ の任意の頂点 Λ_0 に隣接する頂点は、上と同様に考えると q^2+q+1 個の $\mathbb{P}^2_k$ の k-有理点に対応するものと、同じ個数の $\mathbb{P}^2_k$ の k-有理直線に対応するものとに分けられる. これらを同等に見るためには、$\mathbb{P}^2_k$ をそのすべての k-有理点で blow-up した曲面 B を用意すると良い. Λ_0 に隣接する頂点は B の k-有理直線に対応し、その様な頂点の二つが隣接し Λ_0 と共に 2-単体をなすための必要十分条件は、対応する 2 本の直線が交わりを持つ事である.

2. Drinfeld 対称空間.

Drinfeld 対称空間の導入には多くの方法があり、それぞれの用途、状況に応じて使い分けが出来る; 例えば [**Schneider, Stuhler 1991**, §1] を参照. ここでは、前節の Bruhat-Tits building を用いて R 上の形式スキームの形でこれを導入し、Chapter 2 の §3 で定義した関手 Rig によって Rigid 解析空間の形で得る、という方法を採用しよう. 尚、以下の構成の前半は基本的には [**Mustafin 1978**] 及び [**Kurihara 1980**] からの引写しであるが、[**石田 1995**] や [**Ishida, Kato 1995**] も参照のこと.

まず、V の格子 M に対して R 上のスキーム $\mathbb{P}(M)=\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}_R M)$ を考えよう. 当たり前の事であるが、これは $\mathbb{P}^n_R$ に R 上同型である; しかし、その同型は標準的なものではない. 一方、標準的同型 $M\otimes_R K\cong V$ がある事から、$\mathbb{P}(M)\otimes_R K$ と $\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}^n_K$ との間には標準的な同型が存在している事がわかる. また、$\mathbb{P}(M)$ は M の相似類にしか依らないという事も明らかであろう. これにより、我々は次の全単射

を得る:

$$\Delta_0 \xrightarrow{\sim} \left\{ (\mathbb{P}, \phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n, \\ \phi\colon \mathbb{P} \otimes_R K \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V) \end{array} \right\} / \sim,$$

ここに、$(\mathbb{P}_1, \phi_1) \sim (\mathbb{P}_2, \phi_2)$ であるための必要十分条件は $\Phi\colon \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ なる R-同型が存在して図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 \otimes_R K & \xrightarrow{\Phi \otimes_R K} & \mathbb{P}_2 \otimes_R K \\ {\scriptstyle \phi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ \mathbb{P}(V) & = & \mathbb{P}(V) \end{array}$$

を可換となる事である. ただし、ここに $\mathbb{P}(V)$ とは、線型空間 V の射影化を表す.

さて、次に隣接する二つの頂点 Λ_1 と Λ_2 を考えよう. 上にも見たように、対応する $\mathbb{P}(\Lambda_1)$ と $\mathbb{P}(\Lambda_2)$ を考えると、これらの一般ファイバー $\mathbb{P}(\Lambda_1) \otimes_R K$ と $\mathbb{P}(\Lambda_2) \otimes_R K$ の間には自然な同型があるから、$\mathbb{P}(\Lambda_1)$ と $\mathbb{P}(\Lambda_2)$ の間には自然な双有理射が存在している. もっと具体的に書くと、Λ_1 と Λ_2 の代表元 M_1 と M_2 を適当にとって、$M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \pi M_1$ なる様にすると、$M_2 \hookrightarrow M_1$ により $\mathbb{P}(\Lambda_1)$ から $\mathbb{P}(\Lambda_2)$ への有理射が得られる. 我々は、この有理写像の $\mathbb{P}(\Lambda_1) \times_R \mathbb{P}(\Lambda_2)$ の中でのグラフの閉包を $\mathbb{P}(\Lambda_1) \vee \mathbb{P}(\Lambda_2)$ と書く事にする. 簡単な計算により、これは $\mathbb{P}(\Lambda_1)$ を $\mathbb{P}(M_1/M_2) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}_k M_1/M_2)$ に対応する閉部分スキームに沿ってブローアップしたものに R-同型である事がわかる.

この $\vee$ という演算は可換かつ結合的である事が容易に示されるから、我々はこの様な構成を Δ の有限部分複体に拡張出来る; 即ち、Δ の有限部分複体 S に対して、S に属する全ての頂点 Λ に関して $\mathbb{P}(\Lambda)$ の $\vee$-和をとるのである. こうして出来た R-スキーム $\mathbb{P}(\mathsf{S})$ (記号の乱用であるが、S の射影化という意味ではない) は非特異射影的で、その一般ファイバーは $\mathbb{P}(V)$ に自然に同型であり、中心ファイバーは被約な正規交差因子で、その双対グラフは丁度 S に一致する.

さて、この構成を Δ の一般の部分複体に拡張しようとすると、これは本質的に R 上の射影空間の中心ファイバー内を中心としたブローアップの極限を考える事となるから、もはやスキームの圏の中では話が出来ない. 従って、Rigid 解析空間、もしくは形式スキームの圏で話をする事となる. これ以降の構成は [石田 **1995**] に詳しいので詳細はそれを参照するとして、ここではこれを非常にラフに言う事にする. 与えられた Δ の凸部分複体 Δ_* に対してこれの有限部分複体 S を任意に考え、$\mathbb{P}(\mathsf{S})$ の中心ファイバーに沿った完備化 $\widehat{\Omega}(\mathsf{S})$ を考える. 次に $\widehat{\Omega}(\mathsf{S})$ の Zariski 開集合 $U = \widehat{\Omega}(\mathsf{S})'$ を、任意の $\mathsf{S} \subset \mathsf{T} \subset \Delta_*$ なる有限部分複体 T について、自然な誘導射 $\rho^{\mathsf{T}}_{\mathsf{S}}\colon \widehat{\Omega}(\mathsf{T}) \to \widehat{\Omega}(\mathsf{S})$ が同型 $\rho^{\mathsf{T}\,-1}_{\mathsf{S}}(U) \cong U$ を誘導する様な最大のものとして定義する. こうして、$\widehat{\Omega}(\Delta_*)$ は全ての Δ_* の有限部分複体 S について $\widehat{\Omega}(\mathsf{S})'$ の和として定義される. $\widehat{\Omega}(\Delta_*)$ は正則な形式スキームで、その中心ファイバーの双対グラフは Δ_* に同型である. Δ_* として Δ 全体をとった場合には $\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}(\Delta)$ と書く事にしよう.

例 2.1. $n=2$ の場合の形式スキーム $\widehat{\Omega}$ を考えよう．この形式スキームの中心ファイバーは可算個の既約成分を持ち、それらは正規交差している．更に、これの双対グラフは Δ になるのであった．各既約成分は例 1.3で考えた B と同型になっている．結果として、$\widehat{\Omega}$ は $\mathbb{P}^2_R$ の形式完備化から始めて、その中心ファイバーの有理点及び有理直線 (の strict transform) を中心にブローアップし、得られたものの中心ファイバーについて同様に有理点及び有理直線 (の strict transform) でブローアップし、という操作をどんどん繰り返して極限をとったものという格好をしている．

これは $n=2$ に限らず、任意の次元でも同等の事が言える．特に $n=1$ の場合は図解しやすい．これは [**Mumford 1972(1)**] に詳しく説明されている．

さて、上で得られた $\widehat{\Omega}(\Delta_*)$ は明らかに admissible な形式スキームであるから、Chapter 2 の §3 で定義した関手 Rig によって対応する Rigid 解析空間を得る事が出来る[1]．これを $\Omega(\Delta_*)$ と書く事にしよう．$\Delta_*=\Delta$ の場合は特に Ω と書く; これは **Drinfeld 対称空間**とか、**Drinfeld 上半空間**と呼ばれるものである．[**Mustafin 1978**, 2.4 (b)] によれば、Ω は集合としては $\mathbb{P}^n_K$ の閉点全体からすべての K-有理超平面を除いたものである:

$$\Omega = \mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K \setminus \bigcup_{\mathrm{H}\in\mathcal{H}} \mathrm{H},$$

ただし、ここに $\mathcal{H}$ はすべての K-有理超平面の集合である．

上の等式の感じをつかむために、$n=1$ の場合について説明しよう (以下の議論はいささか厳密性を欠くが、感じはつかめる): $n=1$ の時は $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ からすべての K-有理点を除いたものである．実際、上にも述べた様に、$\widehat{\Omega}$ は $\mathbb{P}^1_R$ から出発して、その中心ファイバーの有理点をすべてブローアップし、更にまた出てきた有理点すべてでブローアップし.... という操作に関する極限なのであった．そこで、その様なブローアップの列の各段階において、一般ファイバー $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ の点 p の閉包によって決まる切断 $\overline{p}$ を考えると、これは (全空間が正則スキームであるから) 中心ファイバーの非特異点と横断的に交わる．もし、p が K-有理点でないなら、対応する切断 $\overline{p}$ はブローアップのある段階以降は中心ファイバーの k-有理でない点で交わる．その一方で、その点 p が K-有理点ならば、$\overline{p}$ はかならず中心ファイバーの k-有理点で交わってしまう．従って、その極限においては K-有理点からきまる切断は存在し得ない; これはつまり、K-有理点に対応する形式切断は $\widehat{\Omega}$ には存在しないという事を意味している．従って、$\widehat{\Omega}$ の「一般ファイバー」は $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ からすべての K-有理点を除いたという格好となるわけである．一般の n についても、基本的にはこの様な考え方を適用出来る．非常にラフな言い方をすると、Ω は中心ファイバーの「極限点」を $\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K$ から除いたものという事になる．

[1] この形式スキームは一般に quasi-compact ではないが、関手 Rig 自身は特に quasi-compact という仮定なしに定義されていた事に注意.

さて、一般論に戻って、我々は上記のRigid解析空間を形式モデルから具体的に構成したのであるから、Ω という解析空間と共にその解析構造を与えている pure covering も一緒に構成していたはずである. 上述の様に、形式モデル $\widehat{\Omega}(\Delta)$ の中心ファイバーは Bruhat-Tits building Δ と密接な関係にあるから、この pure covering も Δ によって記述出来る. これについては [**Drinfeld 1974**] において記述されているので、次にこれを概観しよう: 一般に K-線型空間 V 上の非負実数値関数 $\alpha\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が K 上の**ノルム**であるとは、以下の条件を満足する事である:

(1) $x \neq 0$ ならば $\alpha(x) > 0$.
(2) $a \in K$ について $\alpha(ax) = |a|\alpha(x)$.
(3) $\alpha(x+y) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}$.

二つの K 上のノルム α と α' は、α' が単に α の正の実数倍であるとき、相似であると呼ばれる.

V の格子 M が与えられたとしよう. この時、V の任意の非零元 x について $\{a \in K \mid ax \in M\}$ は R の分数イデアルであるから (π^m) という格好をしている. そこで $\alpha_M(x) = q^m$ と定義し、更に $\alpha_M(0) = 0$ と約束するとこれは K 上のノルムとなる. 従って、Δ の頂点 Λ に対して V の K 上のノルムの相似同値類 $[\alpha_M]_{M\in\Lambda}$ を対応させる事が出来る. 本質的な事であるが、逆に任意の V の K 上のノルムの相似同値類は Δ の頂点から来るとは限らない. 実際、例えば隣接する頂点 $\Lambda_0 = [e_0, \ldots, e_n]$ 及び $\Lambda_1 = [e_0, \ldots, e_{n-1}, \pi e_n]$ にはそれぞれ

$$\begin{aligned} \alpha_0(\sum a_i e_i) &= \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}, \\ \alpha_1(\sum a_i e_i) &= \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n-1}|, |\pi|^{-1}|a_n|\} \end{aligned}$$

によって与えられるノルムの同値類が対応するが、Λ_0 と Λ_1 を結ぶ辺上の点 $t\Lambda_0 + (1-t)\Lambda_1$ (t は $0 \leq t \leq 1$ なる実数) に対応して

$$\alpha_t(\sum a_i e_i) = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n-1}|, |\pi|^{-t}|a_n|\}$$

というノルムの類があるからである. 実は [**Goldmann, Iwahori 1963**] により次の事がわかる:

命題 2.2. V の K 上のノルムの相似類全体がなす位相空間は、$\mathrm{PGL}(n+1, K)$-同変に Δ の幾何学的実現 $|\Delta|$ と同一視される.

ここに、V の K 上のノルムの相似類全体がなす集合の位相は V の K 上のノルム全体がなす集合に各 $x \in V$ について $\alpha \mapsto \alpha(x)$ が連続となる様な最弱の位相を考えて、その商位相をとったものである.

さて、今Ωを上述の如き集合と捉え、その任意の点$z=(z_0:\cdots:z_n)$についてノルム

$$\alpha_z(\sum a_ie_i)=\left|\sum_{i=0}^{n}a_iz_i\right|$$

を考えよう．もちろん、zからこの様なノルム自体を与える事は不可能であるが、その相似類を与える事は矛盾なく行える．すると、対応$z\mapsto[\alpha_z]$によって写像

$$\rho\colon\Omega\longrightarrow|\Delta|$$

が与えられる．これは$|\Delta|$の普通の位相とΩのRigid解析空間としてのG-位相に関して連続である．[**Drinfeld 1974**]によれば、この写像による任意の単体の逆像は$\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K$のrational subdomainとなっており、これらが$\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K$の強G-位相に関するadmissible open setとしてのΩの解析構造を与える．この時出来上がるaffinoid coveringが、丁度Ωを$\widehat{\Omega}$のRaynaud一般ファイバーと見なした時に生じたpure coveringである、というわけである．$n=1$の場合についてこのpure coveringは[**Boutot, Carayol 1991**, Chap. I]に非常に詳しく記述されているので、これも参照されると良いであろう[2].

この節の最後にΩのG-位相空間としての構造について、一つ注釈を付け加えておく:

命題 2.3. Rigid解析空間Ωは単連結である．

証明は[**van der Put 1987**, 3.5]に明記されている．$n=1$の場合はChapter 3の系1.9からわかる．

注意 2.4. Chapter 3の注意2.2にも述べた様に、Ωが単連結であってもその上にétale被覆は存在し得る．実際、[**Drinfeld 1976**]によればΩは非常に豊かなétale被覆を持っている事が知られている．

3. 一意化.

前節で構成されたΩや$\Omega(\Delta_*)$を有る種の不連続群で商をとる事で、何らかのRigid解析空間もしくは代数多様体を得る事が出来る．この節では主に[**Mumford 1972(1)**]や[**Mustafin 1978**]に従って、このプロセスを概観する事にする．

Bruhat-Tits buliding Δには$\mathrm{PGL}(n+1,K)$が自然に作用していた事を思いだそう．我々が興味を持つ不連続群はすべてこの$\mathrm{PGL}(n+1,K)$における格子なのである．$\Gamma\subset\mathrm{PGL}(n+1,K)$を部分群とする．$\Gamma$が$\Delta$に離散的かつ自由に作用する時、我々は$\Gamma$は**hyperbolic**であると呼ぶ．今、hyperbolicな部分群Γが与えられた時、以下

[2] Ωの解析構造の、もう一つの構成の方法が[**Schneider, Stuhler 1991**, §1 (C)]に詳しく説明されている．

の様なレシピで Δ の凸部分複体 Δ_Γ を定義する: 一般に V の何らかの基底 $\mathrm{Y}_0, \ldots, \mathrm{Y}_n$ によって

$$\left[\sum_{i=0}^{n} R\cdot\pi^{\sigma_i}\mathrm{Y}_i\right], \qquad \sigma_i\in\mathbb{Z}, \qquad 0\le i\le n,$$

と書ける頂点達によって生成される Δ の凸部分複体を **apartment** と呼ぶ. 各 apartment の幾何学的実現は $\mathbb{R}^n$ の $\mathbf{A}_n$-型の三角形分割となっている部分複体で、Δ はこれら apartment の和である. Apartment 全体の集合は、その作り方から $\mathrm{PGL}(n+1,K)$ 内の K-split 極大トーラス全体の集合との間に自然な全単射を有している.

今、与えられた hyperbolic 部分群 Γ 及び任意の K-split 極大トーラス T に対して、$\Gamma\cap T$ は可換離散群でその階数は n を越えない. この階数が丁度 n になる時、対応する apartment は **Γ-apartment** と呼ばれる. そこで、凸部分複体 Δ_Γ をすべての Γ-apartment の和として定義しよう[3]. 商複体 Δ_Γ/Γ が有限複体である場合が大事で、この時 Γ は**正規 hyperbolic** と呼ばれる.

$n=1$ の場合ですら、正規 hyperbolic 部分群を実際に構成するのは容易でない. しかしながら、少なくとも $n=1$ の場合には一般的な構成法が [**Mumford 1972(1)**, §4] によって展開されている. $n=2$ の場合、実際知られている群は非常に少ないのが現状であるが、その幾つかは幾何学的に興味深い一意化を与える; 例えば [**Mumford 1979**] や [**Cartwright, et al 1993(1)**]、[**Cartwright, et al 1993(2)**] を参照.

例 **3.1.** 多分最も簡単だと思われる部分群について述べよう. T を $\mathrm{PGL}(n+1,K)$ の対角行列全体という極大トーラスとしよう. 更に、各 $1\le i\le n$ について $q_i\in K^\times$ を $|q_i|<1$ なる様にとり、$q_0=1$ とする. Γ は T の中で、対角線上の (i,i)-成分が q_i の整数巾という形をしているもの全体とする. Γ は可換な離散部分群で、その階数は n、対応する Δ_Γ は T に対応する apartment そのものである. 明らかに Δ_Γ/Γ は有限複体となっているから Γ は正規 hyperbolic である. 後で見るように、$n=1$ の時はこの部分群を用いて一意化を行うと Tate 曲線が現れる.

さて、Γ を正規 hyperbolic 部分群とし、Δ_Γ を対応する Δ の部分複体としよう. Γ の各元 γ 及び Δ_Γ の各有限部分複体 S について、γS はまた Δ_Γ の有限部分複体であり、その作り方から一般ファイバー上では丁度 γ という線型変換を誘導する様な R-同型 $\mathbb{P}(\mathrm{S})\cong\mathbb{P}(\gamma\mathrm{S})$ が存在する. 形式完備化及び Raynaud 一般ファイバーを経て、これらの R-同型は対応する Rigid 解析空間 $\Omega(\Delta_\Gamma)$ の自己同型 $\gamma\colon\Omega(\Delta_\Gamma)\xrightarrow{\sim}\Omega(\Delta_\Gamma)$ を誘導する. これによって Γ は $\Omega(\Delta_\Gamma)$ の Rigid 解析空間としての自己同型群の部分群と見なすことが出来る. この章で紹介する主定理は次のものである (cf. [**Kurihara 1980**, 1.16], [**Mustafin 1978**, 3.1]):

[3]実は Δ_Γ は Γ で不変な最小の凸部分複体である.

定理 3.2. Γを $\mathrm{PGL}(n+1, K)$ の正規 hyperbolic 部分群とし、Δ_Γ や $\Omega(\Delta_\Gamma)$ を上の通りとする. この時、K 上固有かつ smooth な Rigid 解析空間 X_Γ 及び、解析的被覆写像 $\mathrm{p}\colon \Omega(\Delta_\Gamma) \to X_\Gamma$ が同型を除いて一意的に存在して以下を満たす:

(1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\mathrm{p} \circ \gamma = \mathrm{p}$.
(2) $x, y \in \Omega(\Delta_\Gamma)$ について、$\mathrm{p}(x) = \mathrm{p}(y)$ であるための必要十分条件は何らかの $\gamma \in \Gamma$ によって $x = \gamma(y)$ となる事である.

[**Kurihara 1980**, 1.16] や [**Mustafin 1978**, 3.1] においては形式スキームの言葉でこの定理が述べられているので、実はもっと強く、Rigid 解析空間 X_Γ のみならず、その pure covering をも一意化によって与えられていると考えるのが妥当である; 言うまでもなく、この X_Γ 上の pure covering は前節で考えた $\Omega(\Delta_\Gamma)$ の pure covering から誘導されたものである. この pure covering によって X_Γ のモデル $\mathfrak{X}_\Gamma$ を構成すると、これは前節で与えた形式スキーム $\widehat{\Omega}(\Delta_\Gamma)$ を Γ で割った商という事になるわけで、これが [**Kurihara 1980**, 1.16] や [**Mustafin 1978**, 3.1] において示されている状況である. また、$\mathfrak{X}_\Gamma$ の中心ファイバーは非特異な正規化を持つ既約成分の正規交差因子であり、その双対グラフは丁度 Δ_Γ/Γ に同型となる事も頷けよう.

例 3.3 (Tate 曲線)**.** $n = 1$ として例 3.1で与えた群 Γ を考えよう. Δ_Γ は一つの apartment であり、この場合は $\mathbb{R}$ の整数点を端点とする線分への分解になっている. 対応する形式スキーム $\widehat{\Omega}(\Delta_\Gamma)$ は $\mathbb{P}^1_R$ の形式完備化から始めて、その中心ファイバーの既約成分 0 及び ∞ で次々にブローアップしていった極限である. しかるに、これは Chapter 2 の例 2.5で考えた $\mathbb{P}^{1,\wedge}_R$ の直鎖に他ならない. 従って、対応する Rigid 解析空間 $\Omega(\Delta_\Gamma)$ は $\mathbb{G}^{\mathrm{an}}_{m,K}$ で $q = q_1$ として $\{|q^{i+1}| \le |z| \le |q^i|\}$ という rational subdomains で pure covering が与えられる. その Γ による商は Tate 曲線である.

さて、一般にこの Rigid 解析空間 X_Γ の代数化可能性が問題だが、これは $n = 1$ の時には [**Mumford 1972(1)**, §3] に示されている様に、任意の flat Schottky 群 (これらは正規 hyperbolic 群である) Γ について代数化可能である事が知られている. n が 2 以上の場合にも、以下の様な十分条件が知られている (cf. [**Kurihara 1980**, 2.2.4], [**Mustafin 1978**, 4.1]):

定理 3.4. Γを捻れのない一様格子 (uniform lattice)、即ち、離散的で finite co-volume かつ co-compact なるものとする. この時、$\Delta_\Gamma = \Delta$ であり、対応する形式スキーム $\mathfrak{X}_\Gamma$ は R 上射影的な代数的スキーム X_Γ に代数化可能である. 更にこの時、X_Γ/R の相対標準因子 $\mathrm{K}_{\mathrm{X}_\Gamma/R}$ は相対的に豊富である.

こうして、我々は Γ が捻れのない一様格子である場合に、その標準因子が豊富である様な一般型の非特異代数多様体 $\mathrm{X}_{\Gamma,\eta}$ を得るわけである.

例 3.5 (Mumford 曲線). [**Mumford 1972(1)**] において Mumford は以上の p-進一意化の理論を $n=1$ の場合に展開し、以下の事を示した: 非特異な一般ファイバーを持ち、その中心ファイバーの各既約成分の正規化が $\mathbb{P}^1_k$ に同型であるような正規交差因子で、そのすべての二重点が k-有理である R 上の安定曲線は定理 3.2で示した一意化によって構成出来る.

例 3.6 (Mumford's fake $\mathbb{P}^2$). $n=2$ の場合も興味深い例を示したのはやはり Mumford [**Mumford 1979**] である. Γ を PGL$(3,K)$ の捻れのない一様格子として、その頂点集合 Δ_0 への作用の軌道の数を N とする時、Mumford は得られる非特異代数曲面 $\mathrm{X}_{\Gamma,\eta}$ の様々の数値普遍量を以下の様に計算した:

(1) $\chi(\mathcal{O}_{X_{\Gamma,\eta}}) = N(q-1)^2(q+1)/3$.
(2) $(\mathrm{c}_{1,X_{\Gamma,\eta}})^2 = 3\mathrm{c}_{2,X_{\Gamma,\eta}} = 3N(q-1)^2(q+1)$.
(3) $\mathrm{q}(X_{\Gamma,\eta}) = 0$,

ここに q は不正則数を表す. 非常に興味深いのは、得られる代数曲面 $\mathrm{X}_{\Gamma,\eta}$ は常に宮岡-Yau の不等式 $\mathrm{c}_1^2 \leq 3\mathrm{c}_2$ を等号にしているという点である. 特に上で $q=2$ かつ $N=1$ の場合を考えると、これは一般型曲面で $\mathrm{c}_1^2 = 3\mathrm{c}_2 = 9$、$\mathrm{p}_g = \mathrm{q} = 0$ なるものであり、これは複素数体上で考えた場合 $\mathbb{CP}^2$ と同等の Betti 数を持つ一般型曲面として “fake projective plane” と呼ばれているものである. Mumford は [**Mumford 1979**] において、その様な曲面を $\mathbb{Q}_2$ 上生成する群 Γ を具体的に与えた. また、[**Ishida, Kato 1995**] においては [**Cartwright, et al 1993(1)**] 及び [**Cartwright, et al 1993(2)**] の結果を用いて fake projective plane が Mumford のものの他に少なくとも二つは存在している事が明らかにされている.

例 3.7. ある種の $\mathbb{Q}$ 上の四元数代数を乗法にもつアーベル曲面に関連した志村曲線は適当な (この四元数代数が分岐する様な) 素点で完備化すると、p-進一意化を持つ事が知られている. これははじめ [**Cherednik 1976**] によって発見された後、[**Drinfeld 1976**] によって意味付けがなされた. この場合の p-進一意化は full tree(即ち $\Delta_\Gamma = \Delta$) による Mumford 曲線である. これについては [**Boutot, Carayol 1991**]、[**Boutot 1997**] 等に説明されている; また [**岩田、坂牧、川添、齋藤 1996**] には日本語による説明がある. この理論は Rapoport、Zink、Boutot らによって高次元に拡張されており、これは例えば [**Rapoport, Zink 1996**] を見られたい.

参考文献

Berkovich, V. G.

1. Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-archimedean Fields. Mathematical Surveys and Monographs, No. 33, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1990.
2. The automorphism group of the Drinfeld half-plane, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. Math. **321**, 1127-1132, 1995.

Berthelot, P.

1. Berthelot, P.: Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. preprint.

Bosch, S., Güntzer, U., Remmert, R.

1. Non-Archimedean Analysis. Grundlehren der Math. Wiss. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

Bosch, S., Lütkebohmert, W.

1. Formal and Rigid geometry. I. Rigid spaces. Math. Ann. **295**, 291-317, 1993.

Boutot, J.-F.

1. Uniformisation p-adique des variétés de Shimura. Séminaire Bourbaki, 49ème année, 1996-1997, n° **831**, Juin 1997.

Boutot, J.-F., Carayol, H.

1. Uniformisation p-adique des courbes de Shimura: Les Théorémes de Čerednik et de Drinfeld. Astérisque **196-197**, 45–158, 1991.

Brown, K. S.

1. Buildings. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1989.

Cartwright, D.I., Mantero, A.M., Steger, T., Zappa, A.

1. Group acting simply transitively on the vertices of a building of type $\widetilde{A}_2$, I. Geometriae Dedicata **47**, 143–166, 1993.
2. Group acting simply transitively on the vertices of a building of type $\widetilde{A}_2$, II: the cases $q = 2$ and $q = 3$. Geometriae Dedicata **47**, 167–223, 1993.

Cherednik, I. V.

1. Uniformization of algebraic curves by discrete subgroups of $\mathrm{PGL}_2(k_w)$ with compact quotients. Math. USSR Sbornik, **29**, 55–78, 1976.

Drinfeld, V. G.

1. Elliptic modules. Math. USSR Sbornik, **23**, 561–592, 1974.
2. Coverings of p-adic symmetric regions. Funct. Anal. Appl. **10**, 107–115, 1976.

Dwork, B.

1. p-adic cycles. Publ. Math. **37**, Inst. Hautes Études Sci., 27–116, 1969.

Fresnel, J., van der Put, M.

1. Géométrie Analytique Rigide et Applications. Progress in Math., **18**, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1981.

Gerritzen, L., van der Put, M.

1. Schottky Groups and Mumford Curves. Lect. Notes in Math., **817**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Goldmann, O., Iwahori, N.

1. The space of $\mathfrak{p}$-adic norms. Acta. Math. **109**, 137–177, 1963.

Gouvêa, F. G.

1. p-adic Numbers, An Introduction. Second Edition. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

Huber, R.

1. Étale Cohomology of Rigid Analytic Varieties and Adic Spaces. Aspects of Mathematics, Vol. **30**, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1996.

石田正典

1. p 進単位球体の中の凸体. 短期共同研究「トーリック多様体の幾何と凸多面体」報告集, 1995.

Ishida, M.-N., Kato, F.

1. The strong rigidity theorem for non-archimedean uniformization. preprint (1995), to appear in Tohoku Math. J.

岩田季己、坂牧和宏、川添充、齋藤政彦

1. 志村曲線の p-進一意化 (Čerednik-Drinfeld の定理). 「p-進一意化とその周辺」記録, 15–50, 1996.

Kiehl, R.

1. Der Eidlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimededischen Funktionentheorie. Invent. Math. **2**, 191–214, 1967.
2. Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Invent. Math. **2**, 256-273, 1967.

Kurihara, A.

1. Construction of p-adic unit balls and the Hirzebruch proportionality. Amer. J. Math., **24**, 129–174, 1980.

Lütkebohmert, W.

1. Formal-algebraic and rigid-analytic geometry. Math. Ann. **286**, 341–371, 1990.

Mumford, D.

1. An analytic construction of degenerating curves over complete local rings. Compos. Math. **24**, Fasc. 2, 129–174, 1972.
2. An analytic construction of degenerating abelian varieties over a complete local ring. Compos. Math. **24**, Fasc. 3, 239–272, 1972.
3. An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$. In contribution to Algebraic Geometry, Johns Hopkins Univ. Press. 233–244, 1979.

Mustafin, G.A.

1. Nonarchimedean uniformization. Math. USSR Sbornik **34**, 187–214, 1978.

Rapoport, M.

1. On the bad reduction of Shimura varieties. Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. II, Perspective in Math. **11**, Academic Press, 15–39, 1990.

Rapoport, M., Zink, Th.

1. Period spaces for p-divisible groups. Annals of Math. Studies, **141**, Princeton University Press, 1996.

Raynaud, M.

1. Géometrie analytique rigide d'apres Tate, Kiehl, ... Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris), Bull. Soc. Math. France, Mém. **39/40**, 319–327, 1974.
2. Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar. Invent. Math. **116**, 425–462, 1994.

Schneider, P., Stuhler, U.

1. The cohomology of p-adic symmetric spaces. Invent. Math. **105**, 47–122, 1991.

Tate, J. T.

1. Rigid analytic spaces. Inv. Math., **12**, 257–289, 1971.

Ueno, K.

1. Compact Rigid Analytic Spaces — With special regard to surfaces —. Advanced Studies in Pure Math. **10**, 1987, Algebraic Geometry, Sendai, 1985, 765–794.

van der Put, M.

1. Cohomology on Affinoid Spaces. Compos. Math. **45**, Fasc. 2, 165–198, 1982.
2. A note on p-adic uniformization. Indag. Math. **49**, 313–318, 1987.

EGA: Grothendieck, A. and Dieudonné, J.

1. Eléments de géométrie algébrique I, II, III, IV. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1961-1967.